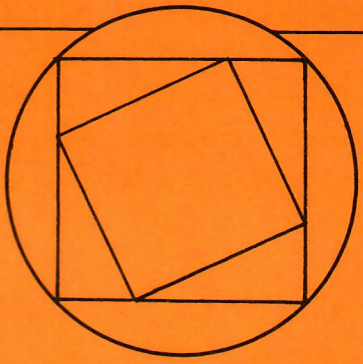
INICIAÇÃO À MATEMÁTICA

A DEMONSTRAÇÃO EM GEOMETRIA

A.Fetissov



EDITORA MIR MOSCOU

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

А. И. ФЕТИСОВ

О ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ В ГЕОМЕТРИИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

МОСКВА

A. FETISSOV

A DEMONSTRAÇÃO EM GEOMETRIA

TRADUZIDO DO RUSSO POR PEDRO LIMA,
LICENCIADO EM MATEMÁTICA

EDITORA MIR
MOSCOVO

Impresso na U.R.S.S.

На португальском языке

© Tradução para o português. Editora Mir, 1985.

Índice

Introdução 6
§ 1. O que é uma demonstração? 8
§ 2. Para que é necessária a demonstração? 12
§ 3. Como deve ser feita a demonstração? 19
§ 4. Que afirmações geométricas se podem aceitar sem demonstração? 44

INTRODUÇÃO

Uma vez, mesmo no início do ano lectivo, tive a ocasião de ouvir uma conversa entre duas meninas. A mais velha delas tinha passado para a sexta classe e a mais nova para a quinta. Trocavam impressões sobre as aulas, os professores, as amigas e as novas disciplinas. A da sexta classe estava muito surpreendida com as aulas de geometria. "Esta é boa! — dizia ela, — a professora entrou na sala, desenhou no quadro dois triângulos iguais e depois levou a aula toda a demonstrar-nos que eram iguais. Não consigo compreender que falta é que isso nos faz." — "E como é que vais aprender a lição?" — perguntou a mais nova. "Vou estudar pelo livro. . . Só que é muito difícil fixar qual é a letra que se tem de escrever em cada lugar. . ."

Nesse dia à noite, ouvi a mesma menina, sentada ao pé da janela, estudando aplicadamente geometria: "Para demonstrar coloca-se o triângulo A′B′C′ sobre o triângulo ABC. . . Coloca-se o triângulo A′B′C′ sobre o triângulo ABC. . ." — repetiu ela várias vezes. Infelizmente, não consegui saber qual foi o aproveitamento desta garota em geometria, mas penso que teve bastante dificuldade a estudar esta disciplina.

Alguns dias mais tarde, veio ter comigo o meu vizinho Pedro, também aluno da sexta classe, e igualmente queixando-se da geometria. Tinham-lhes ensinado na aula e mandado estudar em casa o teorema segundo o qual o ângulo externo dum triângulo é sempre maior do que qualquer ângulo interno que não lhe seja adjacente. Pedro mostrou-me o desenho do manual de Kisseliov (fig. 1) e perguntou: "para que é preciso fazer uma demonstração longa e complicada, quando neste desenho se vê com toda a clareza que o ângulo externo do triângulo é obtuso, enquanto que os ângulos internos não adjacentes a ele são agudos? Ora, um ângulo obtuso é sempre maior que um ângulo agudo — tentava convencer-me Pedro — o que é claro mesmo sem demonstração nenhuma". Tive de explicar ao Pedro que esta afirmação não é de modo nenhum evidente e que há razão para se exigir a sua demonstração.

Por fim, um aluno da oitava classe mostrou-me recentemente um exercício escrito, no qual, segundo a sua expressão, lhe tinham baixado

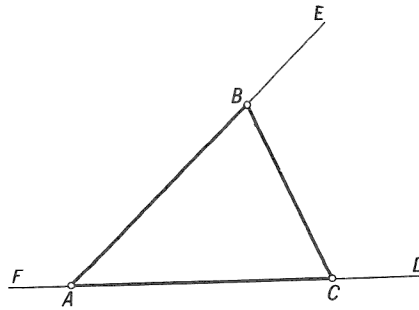


Fig. 1

"injustamente" a nota. No problema em questão era dado um trapézio isósceles cujas bases tinham, respectivamente, 9 e 25 cm de comprimento e os outros lados 17 cm, sendo necessário calcular a altura do trapézio. Para resolver o problema, o aluno tinha inscrito no trapézio uma circunferência, explicando que, com base no teorema sobre o quadrilátero circunscrito, (num quadrilátero circunscrito as somas dos comprimentos dos lados opostos são iguais entre si) era possível inscrever uma circunferência no dito trapézio ($9 + 25 = 17 + 17$). A partir daí, a altura do trapézio era calculada como o diâmetro da circunferência inscrita num trapézio isósceles, o qual é igual à média geométrica entre as bases do trapézio (esta afirmação tinha sido demonstrada pelos alunos num dos exercícios anteriormente resolvidos).

A resolução parecia simples e convincente; no entanto, o professor sublinhou que estava incorrecta a aplicação do teorema sobre o quadrilátero circunscrito. O aluno não conseguia compreender. "Não é verdade que no trapézio circunscrito as somas dos lados opostos são iguais entre si? Ora, neste trapézio a soma das bases é igual à soma dos outros dois lados, o que significa que nele pode ser inscrita uma circunferência. Onde é que está o erro?" — perguntava.

Casos como estes a que acabo de me referir verificam-se com grande frequência. É vulgar os alunos não compreenderem para que é necessário demonstrar verdades que, mesmo sem demonstração, parecem suficientemente claras; por vezes, as demonstrações parecem demasiado complicadas e volumosas. Mas também há demonstrações, à primeira vista claras e convincentes que, examinadas mais rigorosamente, se verifica serem incorrectas.

Este livro foi escrito para ajudar os alunos a esclarecer as seguintes questões:

1) O que é uma demonstração?
2) Para que é necessária a demonstração?
3) Como deve ser feita a demonstração?
4) Que afirmações geométricas se podem aceitar sem demonstração?

§ 1. O QUE É UMA DEMONSTRAÇÃO?

1. Façamos, pois, a nós próprios, esta pergunta: o que é uma demonstração? Imagine que tenta convencer o seu interlocutor de que a Terra tem a forma duma esfera. Para isso, fala-lhe sobre o alargamento do horizonte à medida que o observador se eleva acima da superfície da Terra, das viagens de circum-navegação, sobre a sombra redonda que a Terra projecta na Lua durante os eclipses lunares, etc.

Cada uma destas considerações por meio das quais pretende convencer o seu interlocutor chama-se *argumento* da demonstração. O conjunto de todos os argumentos forma a *argumentação*. Em que se baseia a força ou capacidade de persuasão do argumento? Consideremos, por exemplo, o último dos argumentos citados. Afirmamos que a Terra tem de ser redonda uma vez que a sua sombra é redonda. Baseamos esta afirmação no facto de as pessoas saberem, pela sua experiência, que todos os corpos esféricos projectam sombra redonda e que, inversamente, só um corpo esférico pode em várias posições projectar sempre uma sombra redonda. Portanto, neste caso, apoiamo-nos em FACTOS, tirados da experiência directa da nossa vida, a qual nos mostra as propriedades dos corpos do mundo material que nos rodeia. Depois, recorremos a uma DEDUÇÃO, que neste caso se constrói mais ou menos do seguinte modo:

"Todos os corpos que, em diferentes posições, projectam sombra redonda têm a forma duma esfera". "A Terra, durante os eclipses lunares, ocupando diferentes posições em relação à Lua, projecta sempre sobre ela uma sombra redonda." Conclusão: "Consequentemente, a Terra tem a forma de uma esfera."

Citemos um exemplo da física. Nos anos sessenta do século passado, o físico inglês Maxwell descobriu que as oscilações electromagnéticas se propagam no espaço com a mesma velocidade com que se propaga a luz. Esta circunstância levou-o a formular a suposição (hipótese) de que a luz também consistia em oscilações electromagnéticas. Para demonstrar que

esta hipótese era verdadeira foi necessário mostrar que as semelhanças entre as ondas electromagnéticas e as luminosas não se limitam à coincidência das suas velocidades de propagação; foi necessário arranjar argumentos suficientemente convincentes para demonstrar que ambos os fenómenos são da mesma natureza. Tais argumentos foram dados pelos resultados de experiências em que se verificou uma indubitável influência dos campos magnético e eléctrico no carácter da irradiação da luz por várias fontes. Foi observada ainda uma série de factos que demonstraram convincentemente que as oscilações electromagnéticas e luminosas são fenómenos da mesma natureza.

Eis ainda um exemplo aritmético. Consideremos quaisquer números ímpares, elevemos cada um deles ao quadrado e subtraiamos a cada quadrado uma unidade. Por exemplo:

$$7^2 - 1 = 48;\ 11^2 - 1 = 120;\ 5^2 - 1 = 24;$$
$$9^2 - 1 = 80;\ 15^2 - 1 = 224;$$

etc. Observando os números obtidos, verificamos que todos eles apresentam uma propriedade comum: são todos divisíveis por 8. Depois de repetir a experiência com mais de alguns números ímpares e de obter um resultado idêntico, formulamos a hipótese: "o quadrado de qualquer número ímpar, depois de lhe subtrairmos uma unidade, dá um múltiplo de 8".

Uma vez que esta afirmação diz respeito A TODOS os números ímpares, para a demonstrar é preciso apresentar argumentos aplicáveis a qualquer número ímpar. Entrando em conta com isto, recordemos que TODO O NÚMERO ÍMPAR pode ser apresentado sob a forma $2n - 1$, onde n é um número natural qualquer. O quadrado dum número ímpar, depois de lhe subtrairmos uma unidade, pode ser dado pela expressão $(2n - 1)^2 - 1$. Abrindo os parêntesis, obtemos: $(2n - 1)^2 - 1 = 4n^2 - 4n + 1 - 1 = 4n^2 - 4n = 4n(n - 1)$.

O valor que se obtém é múltiplo de 8 para qualquer n. Efectivamente, a presença do factor 4 indica que o número $4n(n - 1)$ é múltiplo de 4. Além disso, $n - 1$ e n são dois números naturais consecutivos, um dos quais tem forçosamente de ser par. Consequentemente, o nosso valor contém também o factor 2.

Daí que o número $4n(n - 1)$ seja sempre múltiplo de 8, tal como se pretendia demonstrar. Por estes exemplos, podemos esclarecer a nós próprios quais são os principais métodos através dos quais tomamos conhecimento do mundo que nos rodeia, dos seus objectos, fenómenos e leis. O primeiro método consiste em que, por meio dum grande número de observações e experiências com objectos e fenómenos, descobrimos nestes cer-

tas leis gerais. Nos exemplos apresentados pudemos ver que, com base em observações, os homens estabeleceram correspondência entre um corpo e a sua sombra; numerosas observações e experiências comprovaram a natureza electromagnética da luz; por fim, as experiências que realizámos com os quadrados dos números ímpares ajudaram-nos a estabelecer uma propriedade desses quadrados, depois de lhes subtrair uma unidade. Este método — a obtenção de conclusões gerais através da observação de uma grande quantidade de casos particulares — chama-se *indução* (os casos particulares induzem-nos a ideia de que existem leis gerais).

Outro método é aquele que utilizamos quando, conhecendo certas leis gerais, aplicamos esse conhecimento a casos particulares. Esse método chama-se *dedução*. Assim, no último exemplo, aplicámos as leis gerais da aritmética a um caso particular, à demonstração da existência duma certa propriedade de todos os números ímpares.

Este exemplo mostra-nos que a indução e a dedução não podem ser separadas uma da outra. A unidade da indução e da dedução é um traço característico do pensamento científico.

Não é difícil verificar que no decorrer de qualquer demonstração recorremos a ambos estes métodos. Quando procuramos argumentos para demonstrar uma certa afirmação, recorremos à experiência, às observações, aos factos ou às afirmações já demonstradas e fidedignas. Com base nos dados recolhidos deduzimos a autenticidade ou a falsidade da afirmação a demonstrar.

2. Voltemos, no entanto, à geometria. A geometria estuda as propriedades espaciais do mundo material. Dizem-se "espaciais" as propriedades que são determinadas pela forma, grandeza e posição relativa dos objectos. É claro que a necessidade de conhecer essas propriedades está ligada à actividade prática das pessoas: é preciso medir comprimentos, áreas e volumes para construir máquinas, edifícios, abrir caminhos, canais, etc. Naturalmente, os conhecimentos geométricos fundamentais foram obtidos pelo método indutivo a partir dum grande número de observações e experiências. No entanto, à medida que se acumulavam as afirmações geométricas, foi-se verificando que muitas delas podem ser obtidas a partir das outras por meio de silogismos, ou seja, deduções, sem ter de recorrer a qualquer experiência em especial.

Assim, por exemplo, repetidas observações convencem-nos de que "através de dois pontos pode passar uma e só uma recta". Por seu lado, com base nesta verdade, podemos afirmar sem necessitar de qualquer experiência que "duas rectas diferentes não podem ter mais do que um ponto comum". Esta nova verdade obtém-se da primeira por meio dum raciocínio extremamente simples. Efectivamente, se admitirmos que duas

rectas diferentes podem ter dois pontos comuns, daí teremos de concluir que através de dois pontos podem passar duas rectas diferentes, o que contradiz a afirmação anterior.

A actividade prática dos homens levou à descoberta de um grande número de verdades geométricas que reflectem os nossos conhecimentos sobre as formas espaciais do mundo material. O estudo atencioso destas verdades mostrou que uma parte delas se pode obter através de deduções lógicas a partir das outras. Daqui surgiu a ideia de escolher entre as afirmações geométricas uma parte das mais simples e gerais, que se podem aceitar sem demonstração, obtendo as restantes propriedades e dependências geométricas pelo método dedutivo a partir das verdades fundamentais.

Esta ideia já tinha surgido entre os geómetras da Antiga Grécia, que começaram a juntar num sistema as verdades geométricas então conhecidas, deduzindo-as a partir de um número relativamente pequeno de verdades fundamentais. Foi o geómetra grego Euclides de Alexandria quem, 300 anos antes da nossa era, expôs da forma mais perfeita para o seu tempo o sistema dos conhecimentos geométricos. Nessa exposição eram escolhidas algumas afirmações, aceites sem demonstração — os chamados *axiomas* (da palavra grega 'αξιοζ que significa "fidedigno", "digno de confiança"). As restantes afirmações, cuja autenticidade se verifica por meio de demonstrações, passaram a chamar-se *teoremas* (da palavra grega θεορεο — penso, medito).

O sistema geométrico euclidiano foi conservado durante muitos séculos e ainda nos nossos dias o ensino da geometria no ensino secundário reflecte em muitas partes a influência de Euclides. Deste modo, um sistema geométrico contém um número relativamente pequeno de verdades fundamentais — axiomas, obtidas pelo método da indução e aceites sem demonstração, enquanto que as restantes verdades geométricas se deduzem dos axiomas por meio de silogismos. É por isso que a geometria é considerada uma ciência fundamentalmente dedutiva.

Actualmente, o trabalho de muitos geómetras tem por fim descobrir quais os axiomas indispensáveis para a construção do sistema geométrico e reduzir, dentro do possível, o seu número. Este trabalho foi iniciado ain da no século passado, e, apesar de muito já ter sido feito, ainda não se pode considerar que esteja totalmente concluído hoje em dia.

Fazendo o balanço de tudo aquilo que foi dito neste capítulo, podemos, portanto, responder à pergunta: o que é a demonstração em geometria? Como vimos, a demonstração consiste num sistema de silogismos, por meio dos quais a veracidade da afirmação a demonstrar é deduzida a partir dos axiomas e das verdades anteriormente demonstradas.

Falta ainda responder a uma pergunta: o que é que nos garante a veracidade das afirmações obtidas por meio de silogismos dedutivos? A veracidade da conclusão dedutiva resulta de ela não passar da aplicação de certas leis gerais a casos particulares, uma vez que é perfeitamente evidente que aquilo que é correcto em qualquer situação também o é num caso particular.

Se eu disser, por exemplo, que a soma dos ângulos de qualquer triângulo é igual a 180 graus e que a figura ABC é triangular, então não resta qualquer dúvida de que $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$. Estudando com atenção a geometria verifica-se facilmente que é precisamente este o raciocínio que se faz em cada dedução.

§ 2. PARA QUE É NECESSÁRIA A DEMONSTRAÇÃO?

1. Tentaremos agora responder à segunda pergunta: para que é necessária a demonstração?

A necessidade de demonstração resulta dum dos princípios fundamentais da lógica (a lógica é a ciência que estuda as leis do pensamento correcto) — *o princípio da razão suficiente.* Este princípio encerra a exigência de que todas as nossas afirmações sejam fundamentadas, isto é, se façam acompanhar de argumentos suficientemente fortes que confirmem a sua veracidade e a sua concordância com os factos e com a realidade. Tais argumentos podem basear-se tanto na possibilidade de verificação através da observação e da experiência como num raciocínio correctamente construído, incluindo um sistema de silogismos.

Na matemática são utilizados principalmente argumentos deste último tipo.

A demonstração duma afirmação geométrica tem por fim provar a sua fidedignidade através duma dedução lógica, partindo de verdades já demonstradas ou conhecidas.

No entanto, continuamos sem resposta para a seguinte pergunta: valerá a pena recorrer a uma demonstração quando a afirmação a demonstrar é suficientemente clara e evidente?

Eis qual era aproximadamente a atitude dos matemáticos indianos da Idade Média a este respeito. Em vez de demonstrarem muitas das afirmações geométricas, ilustravam-nas com um desenho bastante expressivo, por cima do qual escreviam apenas a palavra "Vê!". No livro Lilavati do matemático indiano Bkhaskara Atcharia, por exemplo, o teorema de Pitágoras é ilustrado com os desenhos da fig. 2. Olhando para estes dois de-

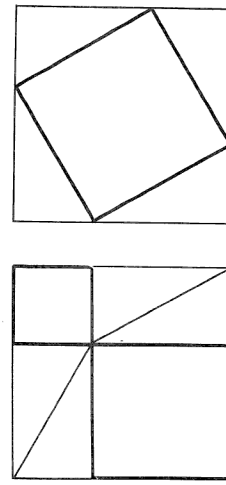


Fig. 2

senhos, o leitor deve "compreender" que a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos do triângulo é igual à área do quadrado construído sobre a hipotenusa.

Poder-se-á dizer que neste caso não existe demonstração? Claro que não! Se o leitor olhasse apenas para o desenho, sem raciocinar, era pouco provável que chegasse a qualquer conclusão. Na realidade, o autor pressupõe que o leitor não olha simplesmente para o desenho, mas que pensa. O leitor deve compreender que à sua frente estão desenhados dois quadrados iguais, os quais, como tal, têm áreas iguais. O primeiro quadrado é formado por quatro triângulos rectângulos iguais e um quadrado, construído sobre a hipotenusa; enquanto que o segundo quadrado é formado pelos mesmos quatro triângulos rectângulos e por dois quadrados, construídos sobre os catetos. Resta apenas concluir que, se a duas grandezas iguais (as áreas dos dois quadrados grandes) tirarmos quantidades iguais (as áreas dos quatro triângulos rectângulos), sobram duas áreas iguais: no primeiro caso — o quadrado construído sobre a hipotenusa, e no segundo caso — os quadrados construídos sobre os catetos.

Como vemos, neste caso não é de modo algum suficiente basearmo-nos na evidência; é preciso pensar e raciocinar.

Mas talvez existam na geometria teoremas tão evidentes que dispensem qualquer raciocínio?

A este respeito convém notar que o recurso sistemático à evidência dos factos não é permitido numa ciência exacta, uma vez que o conceito de "evidente" é extremamente impreciso e instável: aquilo que a uma pessoa parece perfeitamente evidente pode parecer a outra muito duvidoso. Basta recordar até que ponto diferem as descrições do mesmo acontecimento dadas por diferentes testemunhas e como é difícil reconstituir a verdade a partir das "declarações das testemunhas oculares".

Podemos dar um interessante exemplo geométrico de como se pode ser enganado pela evidência aparente. O exemplo consta do seguinte: pegue-se numa folha de papel e trace-se nela uma linha contínua fechada; com uma tesoura faça-se um corte ao longo dessa linha. Pergunta-se: o que é que acontece à folha quando os extremos do corte se unem? A maioria de vós responderá certamente, sem pensar duas vezes, que a folha de papel se divide em duas partes separadas. No entanto, ESTA RESPOSTA PODE ESTAR ERRADA. Façamos a seguinte experiência: peguemos numa fita de papel e formemos com ela um anel, virando ao contrário um dos extremos da fita. Assim se obtém a chamada "*folha de Möbius*" (fig. 3). (Möbius foi um matemático alemão que estudou as superfícies deste tipo.) Se agora cortarmos esta folha segundo uma linha fechada ao longo da fita, mantendo o corte mais ou menos à mesma distância das duas bordas, a fita NÃO SE DIVIDIRÁ em duas partes — continuaremos a ter nas mãos apenas uma folha. Factos semelhantes ao que acabamos de descrever levam-nos a pensar duas vezes sobre até que ponto podemos confiar em considerações baseadas na "evidência".

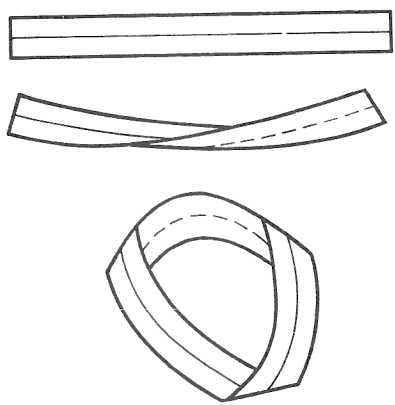


Fig. 3

2. Examinemos este problema com mais atenção. Tomemos como primeiro exemplo o caso acima referido que se passou com a aluna da sexta classe. A menina achava estranho que a professora tivesse desenhado dois triângulos iguais e que depois tivesse demonstrado o facto, aparentemente evidente, de que eles eram iguais. Na realidade, o que se passou não foi isso, evidentemente: A PROFESSORA NÃO DESENHOU DE MODO NENHUM DOIS TRIÂNGULOS IGUAIS; depois de ter desenhado o triângulo ABC (fig. 4), disse que o outro triângulo $A'B'C'$ era construído de tal modo que $A'B' = AB$, $B'C' = BC$ e $\angle B = \angle B'$ e ainda que não se sabia se seriam iguais os ângulos $\angle A$ e $\angle A$, $\angle C'$ e $\angle C$ e os lados $A'C'$ e AC (de facto, não construíra os ângulos A e C segundo os ângulos A' e C' nem fizera o lado $A'C'$ igual ao lado AC):

Sendo assim, neste caso é necessário, a partir das condições $A'B' = AB$, $B'C' = BC$ e $\angle B' = \angle B$, deduzir a igualdade dos triângulos, ou seja, dos seus restantes elementos, o que, evidentemente, requer certos raciocínios, isto é, uma demonstração. Também é fácil mostrar que a igualdade de dois triângulos, obtida com base na igualdade de três pares de elementos correspondentes, não é nem de longe tão "evidente" como pode parecer à primeira vista. Modifiquemos um pouco as condições do primeiro teorema sobre a igualdade de triângulos: sejam dois lados dum dos triângulos iguais a dois lados do outro, acontecendo o mesmo a um dos ângulos, não àquele que se situa entre estes dois lados, mas ao oposto a um deles, por exemplo, a BC (e a $B'C'$). Escrevamos esta condição: em

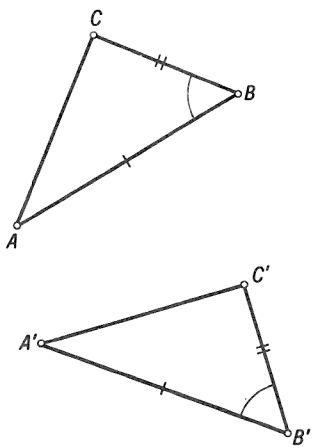


Fig. 4

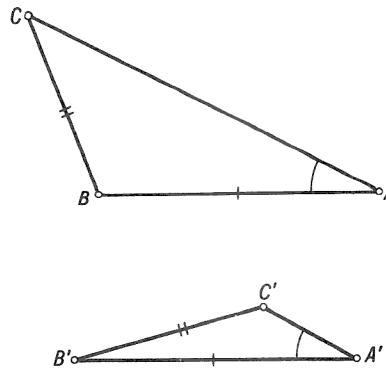


Fig. 5

ΔABC e $\Delta A'B'C'$, $A'B' = AB$, $B'C' = BC$ e $\angle A' = \angle A$. Que podemos dizer sobre estes triângulos? Por analogia com o primeiro caso da igualdade de triângulos seria de esperar que também neste caso os triângulos fossem iguais, mas a fig. 5 mostra-nos com toda a evidência que os triângulos desenhados ABC e $A'B'C'$, apesar de obedecerem às condições $A'B' = AB$, $B'C' = BC$ e $\angle A' = \angle A$, não são de maneira nenhuma iguais.

Exemplos semelhantes levam-nos a ser muito cuidadosos com os nossos juízos e mostram com bastante clareza que só uma demonstração correctamente construída nos pode garantir a veracidade das afirmações feitas.

3. Vejamos agora o segundo teorema — sobre o ângulo externo do triângulo, aquele que deixou perplexo o meu vizinho Pedro. Efectivamente, naquele desenho apresentado pelo manual oficial, o ângulo externo é obtuso, enquanto que os ângulos internos não adjacentes a ele são agudos, o que se verifica facilmente a olho, sem precisar de medições. Mas significará isto que o teorema não necessita de demonstração? Claro que não. É que o teorema não diz respeito apenas ao triângulo que está desenhado no livro, no papel ou no quadro, mas a TODO E QUALQUER TRIÂNGULO, mesmo que seja muito diferente daquele que é apresentado no manual.

Imaginemos, por exemplo, que o ponto A se afasta do ponto C ao longo da recta que os une. Obteremos então um triângulo ABC tal que o ângulo do ponto B também será obtuso (fig. 6). Se o ponto A se afastar do ponto C uns dez metros, então, num triângulo tão comprido, o nosso

Fig. 6

transportador das aulas já não nos permitirá observar qualquer diferença entre o ângulo interno B e o ângulo externo. Mas se o ponto A se afastasse do ponto C a uma distância igual à que separa a Terra do Sol, então poderíamos afirmar com toda a certeza que nenhum dos mais exactos instrumentos modernos de medição de ângulos poderia registar a diferença entre estes dois ângulos. Daqui resulta claramente que a respeito deste teorema também não se pode falar de "evidência". A demonstração rigorosa deste teorema NÃO DEPENDE do aspecto casual do triângulo apresentado no desenho e prova que o teorema sobre o ângulo externo se aplica a TODO E QUALQUER triângulo, sem depender de forma alguma do comprimento relativo dos seus lados. Por isso, mesmo nos casos em que a diferença entre o ângulo interno e o externo é tão pequena que escapa aos nossos instrumentos de medição, mantemo-nos convictos de que essa diferença EXISTE. De facto, demonstrámos que, em qualquer caso, o ângulo externo do triângulo é sempre maior do que o ângulo interno não adjacente a ele.

A propósito deste exemplo é necessário chamar a atenção para o papel do desenho na demonstração dum teorema geométrico. É necessário ter bem presente que o desenho é apenas UM MEIO AUXILIAR da demonstração, que ele não passa dum EXEMPLO, dum CASO PARTICULAR em toda a classe de figuras geométricas a que se refere a demonstração em causa. Por isso, é muito importante saber distinguir no desenho dado as características gerais e permanentes da figura das que são particulares e casuais. Por exemplo, no desenho alusivo ao teorema sobre o ângulo externo dum triângulo, apresentado no manual oficial, surge como casual o facto de o ângulo externo ser obtuso, enquanto que os internos são agudos. É evidente que não nos podemos basear em tais factos particulares para demonstrar uma propriedade que é comum a todos os triângulos.

Uma particularidade essencial da demonstração geométrica que contribui, em grande parte, para a tornar indispensável, consiste em que, por meio dela, se estabelecem as propriedades gerais das figuras espaciais. Se a demonstração tiver sido feita correctamente e tiver partido de factos iniciais correctos, então podemos estar absolutamente seguros da veracidade da afirmação demonstrada. Justamente por isso é que estamos convictos de que qualquer teorema geométrico, tal como, por exemplo, o teorema

de Pitágoras, é verdadeiro para triângulos de todas as dimensões, quer tenham alguns milímetros de lado ou milhões de quilómetros.

4. Finalmente, existe ainda uma razão extraordinariamente importante que determina a necessidade de demonstração. Trata-se de que a geometria não é um conjunto aleatório de verdades que descrevem as propriedades espaciais dos corpos, mas sim um SISTEMA CIENTÍFICO, construído de acordo com leis rigorosas. Neste sistema, cada teorema está organicamente ligado ao conjunto das afirmações anteriormente assentes, sendo essa ligação revelada por meio da demonstração. Por exemplo, o célebre teorema segundo o qual a soma dos ângulos dum triângulo é igual a 180° demonstra-se com base nas propriedades das rectas paralelas, o que revela uma estreita ligação entre a teoria das rectas paralelas e as propriedades das somas dos ângulos internos dos polígonos. É precisamente na teoria das rectas paralelas que se baseia também a teoria da semelhança entre figuras.

Deste modo, cada teorema geométrico está ligado por todo um sistema de deduções aos teoremas anteriormente demonstrados; estes, aos que foram demonstrados ainda antes; e assim por diante, até que as cadeias de deduções atingem as definições fundamentais e os axiomas que formam a base de todo o edifício da geometria. É fácil estudar este sistema de ligações, pegando em qualquer teorema geométrico e examinando todas as afirmações em que ele se baseia.

Resumindo tudo aquilo que foi dito em relação à necessidade de demonstração, podemos afirmar o seguinte:

a) Na geometria, apenas um número reduzido de verdades fundamentais — os axiomas — são aceites sem demonstração. Todas as outras verdades — os teoremas — são demonstradas com base nestes axiomas através duma cadeia de deduções. A justeza dos axiomas, pelo seu lado, é garantida pelo facto de que tanto eles como os teoremas demonstrados por meio deles foram verificados através de repetidas observações e de uma longa experiência.

b) A demonstração é exigida por uma das leis fundamentais do nosso pensamento — o princípio da razão suficiente, que aponta para a necessidade de fundamentar rigorosamente as nossas afirmações.

c) Numa demonstração rigorosamente construída só nos podemos basear nas afirmações anteriormente demonstradas e nunca em factos considerados "evidentes"[1)].

[1)] Muitos princípios científicos, primeiramente considerados irrefutáveis em virtude da sua evidência, revelaram-se com o tempo falsos. Em qualquer ciência, cada princípio deve ser rigorosamente demonstrado.

d) A demonstração é necessária também para garantir o carácter geral da afirmação demonstrada, ou seja, que esta é aplicável a qualquer caso particular..

e) Finalmente, por meio da demonstração, as verdades geométricas podem ser dispostas segundo um SISTEMA coerente de conhecimentos científicos, no qual se revelam as ligações internas entre as diversas propriedades das formas espaciais.

§ 3. COMO DEVE SER FEITA A DEMONSTRAÇÃO?

1. Passemos agora à pergunta seguinte: a que condições deve obedecer a demonstração para que a possamos considerar *correcta*, ou seja, para que garanta a veracidade da dedução feita a partir de premissas verdadeiras? Antes de mais, chamemos a atenção para o facto de que cada demonstração é composta de uma série de silogismos, de modo que a justeza ou incorrecção da demonstração no seu todo depende da justeza ou incorrecção dos silogismos que a compõem.

Como já vimos atrás, o silogismo dedutivo consiste na aplicação duma lei geral a um certo caso particular. Para não cometer erros no silogismo, é necessário conhecer certos esquemas com a ajuda dos quais se representam as relações entre quaisquer conceitos, inclusive geométricos. Vejamos um exemplo. Suponhamos que construímos o seguinte silogismo: 1) Todos os rectângulos têm as diagonais iguais entre si. 2) Todos os quadrados são rectângulos. 3) Conclusão: todos os quadrados têm as diagonais iguais entre si.

Que temos neste caso? A primeira proposição exprime uma determinada lei geral, de acordo com a qual todos os rectângulos, isto é, TODA A CLASSE das figuras geométricas designadas por rectângulos, pertencem à classe dos quadriláteros cujas diagonais são iguais. A segunda proposição afirma que a classe dos quadrados está inteiramente contida na classe dos rectângulos. Daqui temos plena razão para concluir que toda a classe dos quadrados faz parte da classe dos quadriláteros cujas diagonais são iguais. Exprimamos este silogismo segundo uma forma geral. Representemos a classe mais vasta (a dos quadriláteros cujas diagonais são iguais) pela letra P, a classe média (a dos rectângulos) por M e a classe menor (a dos quadrados) por S. Então o nosso silogismo terá a seguinte forma esquemática:

1) M está contida em P.
2) S está contida em M.
3) Conclusão: S está contida em P.

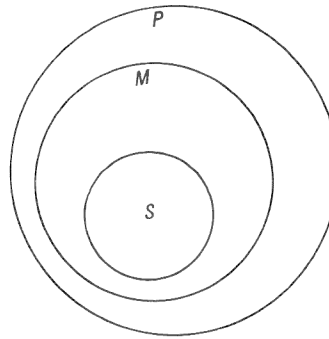


Fig. 7

É fácil representar graficamente esta relação entre classes. Representemos a classe maior (*P*) por um círculo grande (fig. 7). A classe *M* será representada por um círculo menor, totalmente contido dentro do primeiro. Finalmente, a classe *S* vai ser representada por um círculo ainda menor, inteiramente contido dentro do segundo. Não há dúvida nenhuma de que em tal situação o círculo *S* está completamente contido dentro do círculo *P*.

Assinalemos que este método de representação de relações entre conceitos foi proposto pelo ilustre matemático Leonardo Euler, membro da Academia das Ciências de S. Petersburgo (1707—1783).

Por meio de esquemas semelhantes podem-se representar também outros tipos de silogismos. Examinemos ainda um silogismo de conclusão negativa:

1) Qualquer quadrilátero cujos ângulos opostos não somem 180° não pode ser inscrito dentro duma circunferência.

2) A soma dos ângulos opostos do paralelogramo obliquângulo não é igual a 180° .

3) Conclusão: o paralelogramo obliquângulo não pode ser inscrito numa circunferência.

Representemos a classe dos quadriláteros que podem ser inscritos numa circunferência por *P*; a classe dos quadriláteros cujos ângulos opostos não somam 180° por *M*; e a classe dos paralelogramos obliquângulos por *S*. Então verificaremos que o nosso silogismo obedece ao seguinte esquema:

1) Nenhum elemento de *M* pertence a *P*.

2) *S* está contida em *M*.

3) Conclusão: nenhum elemento de *S* pertence a *P*.

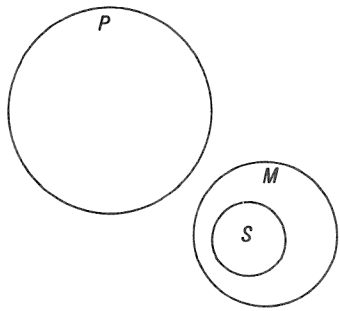


Fig. 8

Esta correlação também pode ser representada duma forma muito clara por meio dos círculos de Euler (fig. 8).

A esmagadora maioria dos silogismos dedutivos na geometria são construídos de acordo com o primeiro ou com o segundo esquema apresentado.

2. Formas semelhantes de representação da correlação entre conceitos geométricos permitem compreender perfeitamente a estrutura de qualquer silogismo e detectar os erros dos silogismos incorrectos.

Estudemos, a título de exemplo, o raciocínio atrás referido, feito por um aluno da oitava classe e considerado errado pelo seu professor. O raciocínio do aluno foi este:

1) As somas dos lados opostos de qualquer quadrilátero circunscrito são iguais.

2) No trapézio em questão as somas dos lados opostos são iguais.

3) Conclusão: este trapézio pode ser circunscrito a uma circunferência.

Representando por P a classe dos quadriláteros circunscritos, por M a classe dos quadriláteros em que as somas dos lados opostos são iguais e por S, a classe dos trapézios em que a soma das bases é igual à soma dos outros dois lados, podemos reduzir o raciocínio ao seguinte esquema:

1) P está contido em M.

2) S está contido em M.

3) A conclusão — S está contida em P — ESTÁ ERRADA, porque, representando as relações entre as classes por meio dos círculos de Euler (fig. 9), verificamos que, embora P e S estejam contidos em M, não podemos daí tirar qualquer conclusão acerca da sua posição relativa.

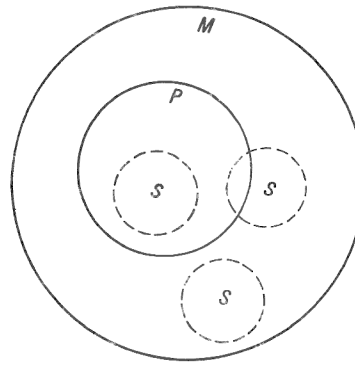


Fig. 9

Para esclarecer melhor o carácter erróneo desta conclusão consideremos, por exemplo, o seguinte raciocínio, perfeitamente análogo ao primeiro:

1) A soma de dois ângulos suplementares é sempre igual a 180°.

2) A soma destes dois ângulos é igual a 180°.

3) Conclusão: estes dois ângulos são suplementares. Esta conclusão está, evidentemente, errada, uma vez que a soma dos ângulos em causa pode ser igual a 180° sem que eles sejam suplementares (por exemplo, os ângulos opostos dum quadrilátero inscrito). Qual é a razão de semelhantes erros?

A explicação é a seguinte: quem faz raciocínios deste tipo está a utilizar o TEOREMA DIRECTO em vez de utilizar o INVERSO. No caso do quadrilátero circunscrito, o aluno baseou-se no teorema segundo o qual as somas dos lados opostos dum quadrilátero circunscrito são iguais entre si. O teorema inverso, de acordo com o qual se pode inscrever uma circunferência dentro de qualquer quadrilátero em que as somas dos lados opostos sejam iguais entre si, não está demonstrado no manual oficial, ainda que seja possível demonstrá-lo; nós apresentaremos mais adiante essa demonstração.

Se esse teorema tivesse sido demonstrado, então o silogismo correcto deveria ser construído do seguinte modo:

1) Dentro de qualquer quadrilátero, em que as somas dos lados opostos sejam iguais entre si, é possível inscrever uma circunferência.

2) Neste trapézio a soma das bases é igual à soma dos outros dois lados.

3) Conclusão: consequentemente, neste trapézio é possível inscrever uma circunferência. Claro que esta conclusão já é perfeitamente correcta, visto que está construída segundo o esquema ilustrado pela fig. 6:

1) M está contido em P.

2) S está contido em M.

3) Conclusão: S está contido em P.

Portanto, o erro do aluno da oitava classe consistia em que ele baseava a sua demonstração no teorema directo em vez de a basear no inverso.

3. Demonstremos este importante teorema inverso.

TEOREMA. *Dentro de qualquer quadrilátero, em que as somas dos lados opostos sejam iguais entre si, é possível inscrever uma circunferência.*

Antes do mais, frisemos que se num quadrilátero é possível inscrever uma circunferência, então o centro dessa circunferência encontra-se à mesma distância de todos os lados. Uma vez que a bissectriz do ângulo é o lugar geométrico dos pontos que estão à mesma distância de dois lados, o centro da circunferência inscrita está situado na bissectriz de cada ângulo interno. Portanto, o centro da circunferência inscrita é o ponto de intersecção das quatro bissectrizes dos ângulos internos do quadrilátero.

Além disso, se pelo menos três das bissectrizes dum quadrilátero se intersectarem no mesmo ponto, então a quarta bissectriz também passará por esse ponto, o qual se encontra à mesma distância de cada um dos quatro lados e é o centro da circunferência inscrita. Esta afirmação demonstra-se por meio dos mesmos raciocínios que se utilizam na demonstração do teorema sobre a existência da circunferência inscrita num triângulo, pelo que propomos ao leitor que a demonstre sozinho.

Passemos agora à parte principal da demonstração. Seja dado, pois, um quadrilátero $ABCD$ (fig. 10) em relação ao qual se verifica a igualdade:

$$AB + CD = BC + AD. \tag{1}$$

Antes de mais, exclua-se o caso do quadrilátero dado ser um losango, já que as diagonais do losango coincidem com as bissectrizes dos ângulos internos, e, por conseguinte, o seu ponto de intersecção é o centro da circunferência inscrita, ou seja, num losango é sempre possível inscrever uma circunferência. Consideremos, portanto, que no nosso quadrilátero existem dois lados consecutivos desiguais. Seja, por exemplo, $AB > BC$. Então, de acordo com a igualdade (1), teremos $CD < AD$. Demarcando em AB o segmento $BE = BC$, obtemos o triângulo isósceles BCE. Demarcando em AD o segmento $DF = CD$, obtemos o triângulo isósceles CDF. Demonstremos que ΔAEF também é isósceles. Efectivamente, transpondo na igualdade (1) BC para o lado esquerdo e CD para o lado direito, ob-

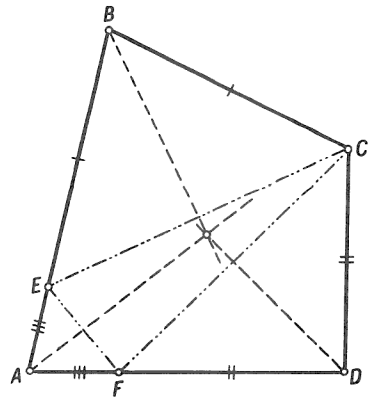


Fig. 10

temos: $AB - BC = AD - CD$. Mas como $AB - BC = AE$ e $AD - CD = AF$, temos que $AE = AF$, ou seja, ΔAEF é isósceles. Tracemos as bissectrizes dos ângulos correspondentes aos três triângulos isósceles obtidos, ou seja, as bissectrizes dos ângulos $\angle B$, $\angle D$ e $\angle A$. Estas três bissectrizes são perpendiculares às bases CE, CF e EF, dividindo-as ao meio. Consequentemente, elas são perpendiculares traçadas a partir dos pontos médios dos lados do triângulo CEF e, portanto, devem intersectar-se todas no mesmo ponto. Isto significa que três bissectrizes do nosso quadrilátero se intersectam no mesmo ponto, o qual, como já foi visto, é o centro da circunferência inscrita.

4. É bastante frequente encontrar-se o seguinte erro nas demonstrações: em vez de se utilizar o teorema inverso utiliza-se o directo. É preciso prestar muita atenção para não cometer este erro. Por exemplo, quando se pergunta aos alunos de que tipo é um triângulo cujos lados têm, respectivamente, 3, 4 e 5 unidades de comprimento, ouve-se geralmente, como resposta, que é um triângulo rectângulo, porque a soma dos quadrados de dois dos seus lados, $3^2 + 4^2$, é igual ao quadrado do terceiro lado: 5^2. Ao responderem afirmam que utilizam o teorema de Pitágoras, quando, na realidade, utilizam-se o seu inverso. Este teorema inverso afirma que se a soma dos quadrados de dois lados dum triângulo é igual ao quadrado do terceiro lado, então esse triângulo é rectângulo. Embora este teorema esteja demonstrado no manual oficial, geralmente é-lhe prestada pouca atenção, o que está na origem do erro acima referido.

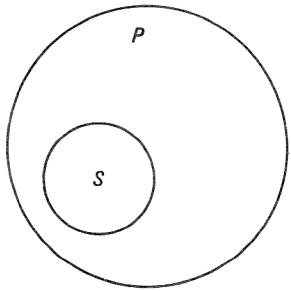


Fig. 11

A este respeito, convém verificar em que condições o teorema directo e o inverso são simultaneamente verdadeiros. Já conhecemos exemplos em que o teorema directo e o inverso são simultaneamente verdadeiros, mas é possível apresentar não menos exemplos em que o teorema directo é verdadeiro mas o inverso é falso. É o caso do teorema directo que afirma correctamente que os ângulos opostos pelo vértice são iguais entre si, enquanto que o teorema inverso deveria afirmar que todos os ângulos iguais são opostos pelo vértice, o que, evidentemente, é falso.

Para averiguar qual é a correlação entre o teorema directo e o inverso, recorra-se de novo à representação esquemática desta correlação. Se o teorema directo compreende a afirmação: "Todos os elementos de *S* são elementos de *P*" ("Todos os pares de ângulos opostos pelo vértice um em relação ao outro são pares de ângulos iguais entre si"), então o teorema inverso deve conter a afirmação: "todos os elementos de *P* são elementos de *S*" ("Todos os pares de ângulos iguais entre si são pares de ângulos opostos pelo vértice"). Representando as relações entre conceitos no teorema directo por meio dos círculos de Euler (fig. 11), verifica-se que o facto de a classe *S* constituir uma parte da classe *P* só nos permite afirmar em termos gerais que "ALGUNS ELEMENTOS de *P* são elementos de *S*". "Alguns pares de ângulos iguais entre si são pares de ângulos opostos pelo vértice".

Em que condições então são simultaneamente verdadeiras as proposições "Todos os elementos de *S* são elementos de *P*" e "Todos os elementos de *P* são elementos de *S*"? É evidente que isso acontece se e só se as classes *S* e *P* forem IDÊNTICAS ($S \equiv P$). Neste caso, o círculo que representa *S* coincide com o círculo que representa *P* (fig. 12). Por exemplo, para o teorema "Todos os triângulos isósceles têm os ângulos adjacentes à base iguais entre si" é verdadeira também a afirmação inversa: "Todos os

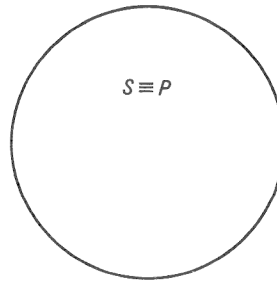


Fig. 12

triângulos que têm os ângulos adjacentes à base iguais entre si são isósceles". Isto explica-se pelo facto da classe dos triângulos isósceles e a classe dos triângulos, em que os ângulos adjacentes à base são iguais, serem uma só. Tal como a classe dos triângulos rectângulos coincide com a classe dos triângulos, em que o quadrado de um dos lados é igual à soma dos quadrados dos outros dois. O nosso aluno da oitava classe "teve sorte", pois resolveu o exercício, apesar de se ter baseado no teorema directo, em vez de se basear no inverso.

Mas isso foi possível apenas porque a classe dos quadriláteros dentro dos quais se pode inscrever uma circunferência coincide com a classe dos quadriláteros em que as somas dos lados opostos são iguais entre si. (Neste caso, tanto é verdade que "todos os elementos de *P* são elementos de *M*" como que "todos os elementos de *M* são elementos de *P*"; ver o esquema da dedução na pág. 21).

Esta investigação mostra simultaneamente que o teorema inverso, quando é verdadeiro, não é nunca uma consequência imediata do directo, *exigindo sempre uma demonstração separada.*

5. Por vezes pode parecer que os teoremas directo e inverso não obedecem ao esquema "Todos os elementos de *S* são elementos de *P*" e "Todos os elementos de *P* são elementos de *S*". É o que acontece quando estes teoremas se exprimem sob a forma do chamado "juízo condicional", o qual se pode esquematizar do seguinte modo: "Se *A* é *B*, então *C* é *D*". Por exemplo: "se um quadrilátero pode ser circunscrito a uma circunferência, então as somas dos seus lados opostos são iguais entre si". A primeira parte desta proposição — "Se *A* é *B*" — chama-se *condição* do teorema, enquanto que a segunda parte — "então *C* é *D*" — chama-se *conclusão*. O teorema inverso obtém-se a partir do directo, se no lugar da condição pusermos a conclusão e vice-versa. Em muitos casos é mais ha-

bitual exprimir o teorema sob a forma de juízo condicional do que sob a forma "todos os elementos de S pertencem a P", a qual se designa por "categórica". No entanto, é fácil verificar que esta diferença é irrelevante, pois qualquer juízo condicional pode ser facilmente convertido em categórico e qualquer categórico em condicional. Consideremos, por exemplo, o seguinte teorema, expresso sob a forma condicional: "Se duas rectas paralelas forem intersectadas por uma terceira, então os ângulos alternos internos são iguais entre si". Este teorema pode ser expresso sob a forma categórica do seguinte modo: "Duas rectas paralelas, intersectadas por uma terceira recta, formam ângulos alternos internos iguais". Sendo assim, os nossos raciocínios anteriores são válidos também para os teoremas expressos sob a forma condicional. Nestes, a veracidade simultânea do teorema directo e do inverso só se verifica se coincidirem as classes dos conceitos correspondentes. Deste modo, no exemplo que acabámos de observar, o teorema directo e o inverso são simultaneamente verdadeiros, uma vez que a classe das "rectas paralelas" coincide com a classe das "rectas que ao serem intersectadas por uma terceira formam ângulos alternos internos iguais".

6. Passemos agora a examinar outros tipos de incorrecções na demonstração. É bastante frequente os erros na demonstração serem originados pelo facto de esta se basear em casos particulares, sem ter em conta que a figura em causa apresenta propriedades diferentes. Foi precisamente esse o erro do meu vizinho Pedro, que queria demonstrar o teorema geral sobre o ângulo externo de qualquer triângulo, limitando-se a examinar um triângulo acutângulo, cujos ângulos externos são efectivamente todos obtusos, enquanto que os internos são agudos.

Apresentemos ainda outro exemplo dum erro semelhante numa demonstração, erro esse muito mais difícil de detectar. Mais atrás, apresentámos o exemplo de dois triângulos DESIGUAIS (ver fig. 4), nos quais eram iguais dois lados e o ângulo oposto a um deles. Daremos agora o exemplo duma demonstração que, não obstante esse facto reconhecido, afirma que todos os triângulos que satisfaçam as condições acima indicadas são necessariamente iguais. Esta demonstração é interessante também por ser muito parecida com a demonstração do terceiro critério de igualdade entre triângulos apresentada no manual oficial.

Consideremos, pois, dois triângulos ABC e $A'B'C'$, em que $AB = A'B'$; $AC = A'C'$ e $\angle C = \angle C'$ (fig. 13). Coloquemos o triângulo $A'B'C'$ em tal posição que o lado $A'B'$ coincida com o lado AB e que o ponto C' ocupe a posição C''.

Unamos os pontos C e C'' e admitamos que o segmento CC'' intersecta o lado AB entre os pontos A e B (fig. 13, *a*). De acordo com as con-

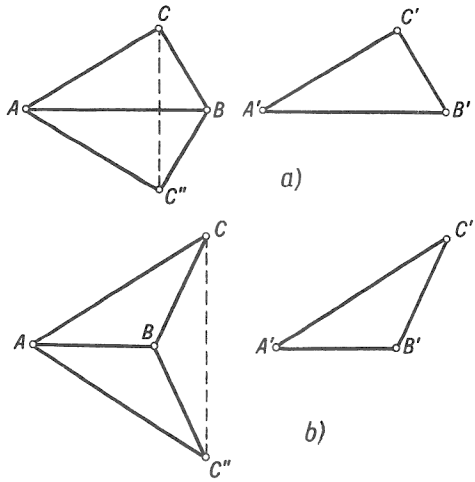


Fig. 13

dições $\Delta ACC''$ é isósceles ($AC = AC''$), o que significa que $\angle ACC'' = \angle AC''C$; mas como $\angle C = \angle C''$, então , sibtraindo a ângulos iguais o mesmo ângulo, obtemos que $\angle BCC'' = \angle BC''C$, o que significa que $\Delta CBC''$ também é isósceles. Portanto, $BC = BC''$, ou seja, os triângulos ABC e ABC'' são iguais em relação a cada um dos três lados. Consequentemente, $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$.

Se o segmento CC'' intersectar a recta AB fora do segmento AB o teorema continua a ser verdadeiro (fig. 13, *b*). Efectivamente, $\Delta ACC''$ neste caso não deixa de ser isósceles e o ângulo ACC'' é igual ao ângulo $AC''C$. Mas como $\angle C = \angle C''$, então, subtraindo estes ângulos a ambos os ângulos da igualdade anterior, verificaremos de novo que $\angle BCC'' = \angle BC''C$, isto é, $\angle BCC''$ é isósceles, donde $BC = BC''$, o que mais uma vez nos leva a obter o terceiro critério da igualdade de triângulos, ou seja, $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$.

Aparentemente, a nossa demonstração está completa e foram esgotados todos os casos possíveis. No entanto, acontece que foi esquecida uma possibilidade : a do segmento CC'' passar por uma das pontas do segmento AB. Na fig. 14 o segmento CC'' passa pelo ponto B. É fácil verificar que neste caso o nosso raciocínio deixa de ser aplicável e os dois triângulos podem ser totalmente diferentes como acontece na fig. 14.

Outro exemplo, muito instrutivo, dum erro do mesmo tipo são os teoremas sobre a superfície lateral dum prisma inclinado e sobre a igual cons-

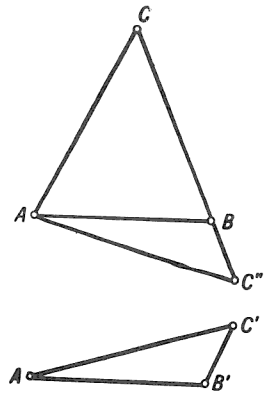


Fig. 14

tituição dos prismas recto e inclinado, demonstrações essas apresentadas no manual oficial de A. P. Kisseliov e no curso de geometria elementar de N. A. Glagoliev. O primeiro destes dois teoremas afirma que "A superfície lateral do prisma é igual ao produto do perímetro da secção perpendicular pela aresta lateral" (A. P. Kisseliov, Geometria, 2.ª parte, pág. 38, em russo). De acordo com o segundo teorema, «Qualquer prisma é constituído da mesma maneira que um certo prisma recto cuja base é dada pela secção perpendicular do prisma inclinado e cuja altura é dada pela sua aresta lateral» (N. A. Glagoliev, Geometria, 2.ª parte, pág. 89, em russo). No entanto, é fácil verificar que tanto um teorema como o outro estão demonstrados apenas para um caso particular, mais precisamente, para o caso em que as arestas laterais são suficientemente compridas para que no prisma se possa achar uma secção perpendicular.

Entretanto, existe toda uma classe de prismas nos quais NÃO É POSSÍVEL ACHAR UMA SECÇÃO PERPENDICULAR QUE INTERSECTE TODAS AS ARESTAS LATERAIS. Trata-se dos prismas de acentuada inclinação e altura muito reduzida (fig. 15). Em tais prismas, qualquer secção perpendicular a uma das arestas laterais não intersecta as restantes arestas, de modo que todos os raciocínios utilizados para demonstrar as afirmações anteriores deixam de ser aplicáveis. Neste caso o erro resulta de estarmos habituados a imaginar o prisma como uma barra bastante alta, enquanto que os prismas baixos, "achatados", quase nunca são representados no quadro, no caderno ou nos livros. Este exemplo também nos alerta a ter cuidado com os desenhos de que nos servimos para ilustrar a demonstração. Cada vez

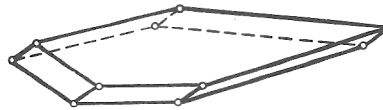


Fig. 15

que nos servimos de qualquer construção para fazer a demonstração devemos sempre perguntar a nós próprios: "Será possível fazer esta construção em qualquer caso?".

Se tal pergunta tivesse sido feita ao demonstrar os referidos teoremas sobre o prisma inclinado, então seria fácil encontrar um exemplo dum prisma tal que nele não fosse possível traçar uma secção perpendicular.

7. Nos dois últimos exemplos, a essência do erro cometido consiste em que, *em vez de se demonstrar a afirmação feita, se demonstra apenas um certo caso particular*, dependente das características peculiares da figura que se utilisou para a demonstração.

Podemos dar mais um exemplo dum erro semelhante, mas de carácter mais profundo e menos perceptível.

Trata-se da demonstração da existência de segmentos incomensuráveis, geralmente apresentada no curso de geometria elementar do ensino secundário. Recordemos resumidamente o desenvolvimento dos raciocínios nesta demonstração. Primeiro dá-se a definição de medida comum de dois segmentos e demonstra-se que a soma e a diferença dos segmentos dados se dividem num número inteiro de segmentos com essa medida. Depois explica-se o método para achar essa medida comum, o qual já era conhecido por Euclides. Esse método consiste em dividir o segmento grande no maior número possível de segmentos iguais ao pequeno; depois dividir o pequeno em segmentos iguais ao resto obtido na primeira divisão; a seguir, dividir o segundo resto pelo primeiro, e assim sucessivamente. Quando um dos restos for divisível num número inteiro de segmentos iguais ao resto seguinte, então este último é a máxima medida comum dos dois segmentos iniciais. Depois disto, definem-se os segmentos que têm medida comum como *comensuráveis* e os que não têm como *incomensuráveis*. No entanto, a própria existência de segmentos incomensuráveis deve ser demonstrada teoricamente, sendo para isso necessário descobrir, pelo menos, um par de segmentos nessas condições. A título de exemplo demonstra-se geralmente que o lado do quadrado e a sua diagonal são incomensuráveis. Para isso utiliza-se o método euclidiano das divisões sucessivas da diagonal pelo lado do quadrado, deste pelo resto da primeira divisão, etc. Ao aplicar este metodo verifica-se que a diferença

entre a diagonal e o lado do quadrado é igual ao lado dum novo quadrado, pelo qual tem de ser dividida uma nova diagonal, e assim sucessivamente, de tal modo que o processo de divisões sucessivas nunca se acaba e não se consegue achar a máxima medida comum entre a diagonal do quadrado e o seu lado. Daí tira-se a conclusão: é impossível determinar a máxima medida comum entre o lado do quadrado e a sua diagonal, ou seja, estes segmentos são incomensuráveis.

Qual é o erro desta conclusão? O erro consiste em que A IMPOSSIBILIDADE DE ACHAR A MÁXIMA MEDIDA COMUM PELO MÉTODO DE EUCLIDES, por si só, não implica de modo algum que a medida comum não exista. Na realidade, quando não conseguimos encontrar um certo objecto através dum certo método, isso ainda não significa que esse objecto não exista, pois talvez seja possível encontrá-lo por outros métodos. Não poderíamos, por exemplo, concordar de modo algum com o raciocínio: "Não é possível ver electrões através de nenhum microscópio; por conseguinte, não existem electrões". É óbvio que a este raciocínio se pode levantar a seguinte objecção: "Sem ser o microscópio, existem outros meios e métodos através dos quais nos podemos convencer da existência dos electrões".

Para tornar válida a demonstração da existência de segmentos incomensuráveis é necessário demonstrar previamente a seguinte afirmação.

Se o processo de procura da máxima medida comum de dois segmentos se pode prolongar indefinidamente, então esses segmentos são incomensuráveis.

Apresentemos a demonstração desta importante afirmação. Sejam dados os segmentos $\overline{a}$ e $\overline{b}$, tais que $\overline{a} > \overline{b}$ (representaremos os segmentos por letras com traços por cima e os números por letras sem traços): Consideremos que as divisões sucessivas de $\overline{a}$ por $\overline{b}$, de $\overline{b}$ pelo primeiro resto $\overline{r}_1$, etc. nos dão uma série INFINITA de restos: $\overline{r}_1, \overline{r}_2, \overline{r}_3, \ldots$ tais que cada um é maior que o seguinte. Sendo assim, teremos:

$$\overline{a} > \overline{b} > \overline{r}_1 > \overline{r}_2 > \overline{r}_3 > \ldots$$

Admitamos que os segmentos $\overline{a}$ e $\overline{b}$ têm uma medida comum p, a qual, de acordo com as propriedades da medida comum, cabe um número inteiro de vezes em $\overline{a}$, em $\overline{b}$ e em cada um dos restos $\overline{r}_1, \overline{r}_2, \overline{r}_3, \ldots$ Consideremos que esta medida cabe em $\overline{a}$ — m vezes, em b — n vezes, em $\overline{r}_1$ — n_1 vezes, em $\overline{r}_2$ — n_2 vezes, . . ., em $\overline{r}_*$ — n_* vezes, etc. Os números $m, n, n_1, n_2, n_3, \ldots$ são inteiros e positivos; além disso, em virtude das desigualdades entre segmentos, teremos desigualdades correspondentes entre números

$$m > n > n_1 > n_2 > n_3 > \ldots$$

Dado termos considerado que a série de segmentos se prolonga indefinidamente, a série de números $m, n, n_1, n_2, n_3, \ldots$ também se deve prolongar indefinidamente, o que é IMPOSSÍVEL, visto que uma série decrescente de números inteiros positivos não pode ser infinita. Esta consideração obriga-nos a rejeitar a possibilidade de existência da medida comum aos dois segmentos iniciais, ou seja, a reconhecê-los incomensuráveis. Pelo exemplo do quadrado verifica-se que existem segmentos para os quais o processo de divisões sucessivas nunca pode ter fim, donde resulta que o lado do quadrado e a sua diagonal são incomensuráveis.

Sem esta afirmação complementar, a demonstração da existência de segmentos incomensuráveis não atinge o seu objectivo, pois o que ela demonstra não é aquilo que se pretende demonstrar.

8. É também bastante frequente encontrar nas demonstrações erros doutro tipo: a utilização como base de afirmações que ainda não foram demonstradas. Embora não tão frequentemente, chega a acontecer que o autor se baseia na própria afirmação que quer demonstrar. É possível, por vezes, ouvir a seguinte conversa entre professor e aluno. O professor pergunta: "Porque é que estas rectas são perpendiculares?". O aluno responde: "Porque formam entre elas um ângulo recto". "E porque é que o ângulo é recto?" — "Porque as rectas são perpendiculares".

Erros semelhantes são designados por "ciclo na demonstração" e é bastante raro manifestarem-se duma forma tão flagrante. É mais frequente encontrá-los duma forma disfarçada. Eis um exemplo: foi dado a um aluno o seguinte exercício: "Demonstrar que se duas bissectrizes dum triângulo são iguais então o triângulo é isósceles".

Foi apresentada a seguinte demonstração: "Sejam AM e BN as duas bissectrizes iguais de ΔABC (fig. 16). Examinando ΔABM e ΔABN, vemos que são iguais, uma vez que $AM = BN$, AB é comum a ambos e $\angle ABN = \angle BAM$, como metades dos ângulos iguais adjacentes à base. Sendo assim, $\Delta ABM = \Delta ABN$, donde $AN = BM$. Seguidamente, considerando ΔACM e ΔBCN, vemos que são iguais porque $AM = BN$ e coincidem também os ângulos adjacentes a estes lados. Por isso, $CN = CM$, donde resulta que $AN + NC = BM + CM$, ou seja, $AC = BC$, como se pretendia demonstrar".

O erro desta demonstração consiste em basear-se na igualdade dos ângulos adjacentes à base do triângulo. Ora a igualdade dos ângulos é uma consequência do triângulo ser isósceles e isso é precisamente o que se pretende demonstrar.

Também há casos de demonstrações que se baseiam em afirmações não demonstradas considerando-as evidentes, embora eles não façam parte dos axiomas. Vejamos dois exemplos. Ao estudar o problema da posi-

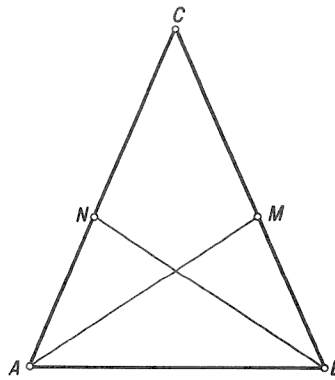


Fig. 16

ção relativa entre uma recta e uma circunferência são considerados três casos: 1) a distância entre a recta e o centro da circunferência é maior do que o raio, ou seja, a recta NÃO INTERSECTA a circunferência; 2) a distância entre a recta e o centro da circunferência é igual ao raio, ou seja, a recta intersecta a circunferência num único ponto (é tangente); 3) a distância entre a recta e o centro da circunferência é menor do que o raio, ou seja, a recta intersecta a circunferência em dois pontos (é secante).

Chamemos a atenção para o facto de que as duas primeiras afirmações são acompanhadas de demonstrações correctas, enquanto que no terceito caso se diz: "A recta passa por um ponto interior do círculo; portanto, É EVIDENTE que ela intersecta a circunferência". No entanto, é fácil verificar que neste raciocínio a palavra "evidente" esconde um importante facto geométrico: "Qualquer recta que passe por um ponto interior do círculo intersecta a circunferência". Esta afirmação é, na verdade, bastante evidente, mas já assinalámos até que ponto é confuso e indefinido o conceito de evidência. Portanto, esta afirmação tem de ser incluída entre os axiomas ou demonstrada com base noutras afirmações.

A título de segundo exemplo apresentaremos a demonstração do teorema inverso sobre o quadrilátero circunscrito, tal como é dada nalguns cursos de geometria elementar. É preciso demonstrar, portanto, que *se as somas dos lados opostos dum quadrilátero são iguais então nesse quadrilátero é possível inscrever uma circunferência.*

Apresentemos a demonstração literalmente: "É dado que $AB + CD = BC + AD$ (fig. 17). Tracemos a circunferência tangente aos lados AB, BC e CD. Queremos demonstrar que ela é tangente também ao lado

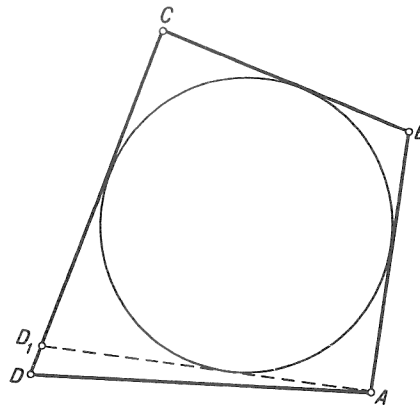


Fig. 17

AD. Suponhamos que não o é. Traçando a partir do ponto A a tangente AD_1, obtemos o quadrilátero circunscrito $ABCD_1$, no qual, de acordo com o teorema directo, $AB + CD_1 = BC + AD_1$. Subtraindo, termo a termo, esta igualdade à que dada, obtemos: $CD - CD_1 = AD_1 - AD$, ou seja, $DD_1 = AD_1 - AD$, o que é impossível (a diferença entre dois lados de ΔADD_1 não pode ser igual ao terceito lado). Consequentemente, a circunferência tangente aos lados AB, BC e CD também é tangente ao lado AD".

O erro desta demonstração consiste em basear-se numa afirmação ainda não demonstrada sobre a posição do ponto A: é preciso demonstrar primeiramente que *o ponto de tangência à circunferência fica situado entre os pontos A e B*. Se os pontos A e D estiverem dispostos como na fig. 18 então não será possível aplicar-lhes os raciocínios que são utilizados na demonstração. É possível demonstrar que os pontos de tangência só se podem situar entre A e B e entre C e D, mas isso exige raciocínios relativamente longos, pelo que é melhor recorrer à demonstração que nós apresentámos antes (ver pág. 23).

Sendo assim, para a nossa pergunta sobre as condições que deve satisfazer uma demonstração para poder ser considerada correcta, ou seja, para garantir a veracidade da afirmação a demonstrar, a resposta é a seguinte:

a) A demonstração deve basear-se apenas em afirmações verdadeiras, isto é, nos axiomas e nos teoremas anteriomente demonstrados.

b) Todos os silogismos que constituem a demonstração devem ser correctamente construídos.

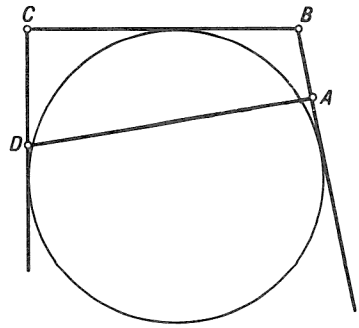


Fig. 18

c) É preciso ter sempre em vista o objectivo da demonstração, ou seja, o reconhecimento da veracidade da afirmação a demonstrar, e não trocar esta afirmação por qualquer outra[1].

9. A propósito da necessidade de satisfazer estas exigências surge naturalmente a pergunta: como procurar demonstrações correctas?

Daremos alguns conselhos para resolver esta questão. Antes de mais, quando precisamos de demonstrar qualquer afirmação geométrica, convém destacar com bastante nitidez a IDEIA PRINCIPAL que deve ser o objecto da demonstração. É bastante frequente esta ideia não estar expressa duma forma suficientemente clara. Vejamos, por exemplo, a seguinte afirmação: "Demonstrar que, unindo consecutivamente os pontos médios dos lados dum quadrilátero, se obtém um paralelogramo". Como podemos demonstrar que se obtém um paralelogramo? Para responder a esta pergunta, recordemos a DEFINIÇÃO de paralelogramo como quadrilátero cujos lados opostos são paralelos dois a dois. Portanto, temos de demonstrar que os segmentos obtidos são paralelos dois a dois, ou seja, há que demonstrar o paralelismo dos segmentos obtidos.

Depois de destacar a afirmação que é necessário demonstrar, convém destacar no texto do teorema as condições indispensáveis à demonstração. No exemplo apresentado, diz-se que unimos OS PONTOS MÉDIOS do quadrilátero, o que significa que em cada lado do quadrilátero se escolhe o ponto que divide esse lado em duas partes iguais.

---

[1] Como aconteceu no exemplo da pág. 30.

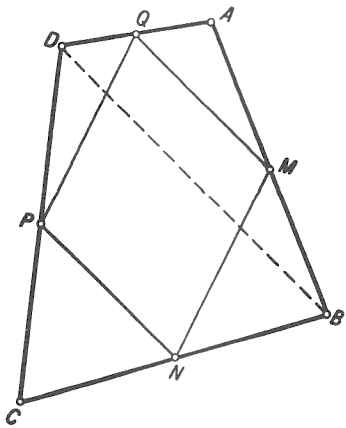


Fig. 19

Formulemos tudo isso segundo a notação simbólica geralmente utilizada na prática escolar e incluída sob as rúbricas "Dados" e "Demonstrar". Assim, no nosso exemplo, se tivermos o quadrilátero $ABCD$ (fig. 19), e se M, N, P, Q forem os pontos médios dos seus lados, então poderemos formular o nosso teorema da seguinte maneira:

Dados: no quadrilátero $ABCD$ $MA = MB$, $NB = NC$, $PC = PD$, $QD = QA$.

DEMONSTRAR: $MN \parallel PQ$, $MQ \parallel NP$.

A esta formulação segue-se a demonstração do teorema. Durante a demonstração, devemos utilizar os axiomas e teoremas anteriormente reconhecidos e, ao mesmo tempo (é preciso ter isso especialmente em conta), as correlações essenciais que são dadas pelas condições do teorema.

10. Mas como encontrar a sucessão de silogismos que permitirá ligar a afirmação a demonstrar às verdades anteriormente reconhecidas e às condições do teorema? Como escolher entre um grande número de diferentes afirmações aquelas que nos ajudarão precisamente a demonstrar o nosso teorema?

O mais sensato é tomar como ponto de partida para as nossas buscas a afirmação que é necessário demonstrar e pôr a seguinte pergunta: de que afirmação se pode obter como consequência a afirmação a demonstrar?

Se for encontrada essa afirmação e se ela for uma consequência das condições e dos teoremas anteriormente demonstrados, então o problema está resolvido. Se assim não for, devemos voltar a pôr a mesma pergunta em relação à nova afirmação, e assim sucessivamente.

Tal método de pensamento é designado na ciência por *análise*.

No exemplo que estamos a analisar, com o quadrilátero, é necessário demonstrar que certos segmentos são paralelos. Recordemos, a par disso, que estes segmentos unem os pontos médios dos lados dum quadrilátero. Tendo fixado estes factos, perguntamos a nós próprios: não haverá entre os factos anteriormente demonstrados algum que fale do paralelismo entre segmentos que unem os pontos médios dos lados dum polígono? Um desses factos é o teorema sobre a linha média do triângulo, o qual afirma que o segmento que une os pontos médios de dois lados dum triângulo é paralelo ao terceiro lado e igual à metade deste. Mas na figura em estudo não existem tais triângulos. No entanto, não é difícil construir um triângulo desse tipo. Tracemos, por exemplo, a diagonal BD. Então, obteremos logo dois triângulos: ABD e BCD, em relação aos quais os segmentos MQ e NP são linhas médias. Portanto, $MQ \parallel BD$ e $NP \parallel BD$; consequentemente, $NP \parallel MQ$. Traçando a segunda diagonal, demonstraríamos do mesmo modo que $MN \parallel PQ$. No entanto, não é necessária esta segunda construção, pois que o primeiro par de triângulos permite-nos afirmar que $MQ = \frac{1}{2} BD$ e $NP = \frac{1}{2} BD$; por conseguinte, $MQ = NP$, ou seja, os lados opostos MQ e NP do quadrilátero $MNPQ$ não só são paralelos, como são iguais, donde resulta imediatamente que este quadrilátero é um paralelogramo.

A título de segundo exemplo consideremos o conhecido teorema sobre a soma dos ângulos internos do triângulo. Neste caso, o texto do teorema

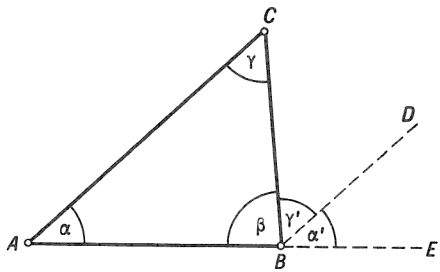


Fig. 20

não inclui quaisquer condições especiais, pelo que basta anotar aquilo que é necessário demonstrar: em ΔABC (fig. 20) $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Pelo conteúdo da afirmação a demonstrar sabemos que precisamos de efectuar a soma dos três ângulos internos do triângulo. O mais indicado é efectuá-la na própria figura. Construa-se o ângulo $\gamma' = \gamma$, adjacente ao ângulo β, com vértice em B. Então, o lado BD do ângulo γ' será paralelo a AC, em virtude da igualdade dos ângulos alternos internos em relação à secante BC. Prolongando o lado AB para lá do ponto B, obtemos $\angle DBE$, que representaremos por α'. $\alpha' = \alpha$ como ângulos correspondentes em relação às mesmas paralelas e à secante AB. Portanto, temos: $\alpha' + \beta + \gamma' = 180°$, uma vez que estes ângulos somados formam um ângulo raso. Daqui, em virtude da igualdade dos ângulos $\alpha' = \alpha$ e $\gamma' = \gamma$, obtemos aigualdade que se pretende

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

Em ambos os exemplos apresentados conseguem-se encontrar bastante depressa as ligações necessárias. Mas existem também casos em que esta ligação se estabelece através de toda uma série de afirmações auxiliares. Então a análise torna-se mais longa e complicada.

11. Apresentemos um exemplo de análise mais complexa. Pretende-se demonstrar a seguinte proposição (A. P. Kisseliov, Geometria, 1.ª parte, pág. 80, problema 13, ed. em russo: *Se a um triângulo circunscrevermos uma circunferência e, a partir dum ponto qualquer desta, traçarmos perpendiculares aos lados do triângulo, então os pontos onde estas perpendiculares intersectam os respectivos lados situam-se na mesma recta* (*recta de Simpson*).

Façamos a análise. Seja dado o triângulo ABC (fig. 21), seja M um ponto da circunferência circunscrita e sejam N, P e Q as projecções deste ponto nos lados BC, CA e AB, respectivamente, do triângulo em causa. É necessário demonstrar que N, P e Q estão na mesma recta. Pode-se anotar a afirmação a demonstrar, tomando em conta que a condição dos pontos N, P e Q pertencerem à mesma recta é equivalente à do ângulo NPQ ser raso. Portanto, temos:

Dados: $MN \perp BC$, $MP \perp CA$, $MQ \perp AB$; o ponto M pertence à circunferência circunscrita a ΔABC.

Demonstrar: $\angle NPQ = 180°$. Analisando o ângulo NPQ, vemos que ele é formado por $\angle MPN = \delta$, $\angle MPA = 90°$ e $\angle APQ = \alpha$ A afirmação estaria demonstrada se conseguíssemos demonstrar que $\angle NPQ = \delta + 90° + \alpha = 180°$. Mas para isso basta demonstrar que $\alpha + \delta = 90°$. Analisemos $\angle CPN = \alpha'$. Dado que $\angle MPC = 90°$, $\alpha' + \delta = 90°$. Se conseguíssemos demonstrar que $\alpha' = \alpha$, então o teorema estaria demons-

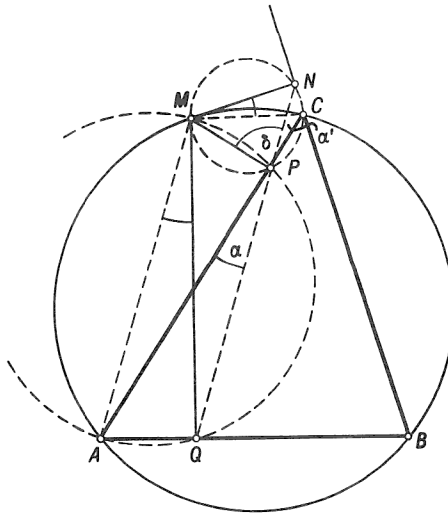


Fig. 21

trado. Tentaremos estabelecer a igualdade procurada analisando novos ângulos, para o que vamos utilizar as condições do teorema. Os ângulos rectos APM e AQM são opostos ao segmento AM, pelo que a circunferência construída sobre AM como diâmetro vai passar pelos pontos P e Q. Devido às propriedades dos ângulos inscritos, $\angle AMQ = \angle APQ = \alpha$. Analogamente, construindo sobre MC como diâmetro uma circunferência, verificamos que ela vai passar pelos pontos P e N; de acordo com as propriedades dos ângulos inscritos, $\angle CMN = \angle CPN = \alpha'$. Vamos tentar agora demonstrar que $\angle AMQ = \angle CMN$. Para isso, assinalemos que o quadrilátero $ABCM$ é inscrito, logo a soma dos seus ângulos opostos é de 180°:

$$\left.\begin{aligned} \angle AMC + \angle B &= 180°, \\ \angle AMQ + \angle QMC + \angle B &= 180°. \end{aligned}\right\} \quad \text{ou} \quad (1)$$

Por outro lado, no quadrilátero $BQMN$ os ângulos com vértices nos pontos Q e N são rectos, pelo que a soma dos outros dois é de 180°:

$$\left.\begin{aligned} \angle QMN + \angle B &= 180°, \\ \angle QMC + \angle CMN + \angle B &= 180°. \end{aligned}\right\} \quad \text{ou} \quad (2)$$

Comparando as igualdades (1) e (2), obtemos:

$$\angle QMC + \angle CMN + \angle B = \angle AMQ + \angle QMC + \angle B,$$

donde

$$\angle CMN = \angle AMQ,$$

ou seja, $\alpha' = \alpha$.

Daqui, como já vimos, resulta que $\alpha + \delta = 90°$, $\alpha + \beta + 90° = 180°$ e, por fim, $\angle NPQ = 180°$.

Se fosse preciso expor por ordem os raciocínios da demonstração, teríamos de seguir o caminho inverso: primeiramente, demonstraríamos que $\angle AMQ = \angle CMN$; depois, verificaríamos as igualdades

$$\angle AMQ = \angle MQN \text{ e } \angle CMN = \angle CPN.$$

Finalmente, sabendo que $\angle CPA = \angle CPN + \angle MPN + 90° = 180°$, obteríamos também que $\angle NPQ = \angle MPN + 90° + \angle APQ = 180°$, ou seja, os pontos N, P e Q situam-se na mesma recta.

Este método de exposição das demonstrações, inverso da análise, geralmente utilizado nos manuais, chama-se *síntese*. Expor a demonstração do teorema sob a forma sintética e mais simples e natural, mas não nos develmos esquecer de que, para ENCONTRAR a demonstração, temos inevitavelmente de recorrer à análise.

A análise e a síntese são, portanto, duas fases indissoluvelmente ligadas entre si do mesmo processo, a construção da demonstração dum dado teorema. A análise é o método de procurar a demonstração, enquanto que a síntese é o método de a expor.

É óbvio que, ao procurar a demonstração para um teorema, nem sempre é fácil encontrar a sucessão de silogismos necessária. Nem sempre se consegue acertar à primeira com o caminho correcto, e às vezes é necessário desistir do método escolhido e experimentar outro.

Apresentemos um exemplo. Consideremos que é necessário demonstrar a afirmação: "Se duas medianas dum triângulo são iguais entre si, então esse triângulo é isósceles". É dado ΔABC, no qual as medianas AM e BN são iguais entre si. Ao princípio, pode parecer útil examinar os triângulos ABM e ABN e demonstrar que são iguais. No entanto, é fácil verificar que não temos dados suficientes para essa demonstração: sabemos apenas que $AM = BN$ e que o lado AB é comum a estes dois triângulos.

Não é dada nem qualquer igualdade de ângulos nem a igualdade dos terceiros lados. Portanto, vemo-nos forçados a desistir deste caminho. Do mesmo modo, podemos concluir que não faz sentido examinar os triângulos ACM e BCN, visto que não dispomos de dados suficientes para demonstrar a sua igualdade.

Tendo desistido da análise destes triângulos, procuremos um novo caminho. Representemos por P o ponto de intersecção das medianas e consideremos os triângulos ANP e BMP. Por força da igualdade das medianas, e graças ao facto do ponto P se situar a um terço de cada uma delas, concluímos que $PN = PM$, $PA = PB$ e $\angle APN = \angle BPM$ como ângulos opostos pelo vértice. Consequentemente, $\Delta ANP = \Delta BMP$, logo $AN = BM$. Mas uma vez que estes segmentos são as metades dos respectivos lados, então $AC = BC$, tal como se pretendia demonstrar.

A capacidade de praticar a análise e de encontrar pelos próprios meios a demonstração adquire-se mediante a resolução de numerosos exercícios, para o que é necessário resolver sistematicamente problemas de demonstração.

12. Para acabar este parágrafo chamemos a atenção para o facto de que a demonstração de qualquer teorema pode ser sempre feita através de dois métodos: o directo e o indirecto.

AO DEMONSTRAR DIRECTAMENTE, verificamos a veracidade da afirmação a demonstrar, estabelecendo uma ligação directa entre esta afirmação e as anteriormente demonstradas.

AO DEMONSTRAR INDIRECTAMENTE, mostramos que, pondo em dúvida a veracidade da afirmação a demonstrar e considerando-a falsa, entramos em contradição com as condições do teorema ou com as afirmações anteriormente demonstradas. Por isso, a demonstração indirecta também se chama DEMONSTRAÇÃO PELA REDUÇÃO AO ABSURDO.

Até aqui, utilizámos principalmente a demonstração directa. Vamos agora apresentar alguns exemplos de demonstração pela redução ao absurdo.

A título de primeiro exemplo vamos apresentar o terceiro critério da igualdade entre triângulos. No manual oficial está escrito que não é cómodo demonstrar este critério mediante a sobreposição, uma vez que nada sabemos sobre a igualdade dos ângulos. No entanto, através do método da redução ao absurdo, até este critério é possível demonstrar mediante a sobreposição.

Sejam dados os triângulos ABC e $A'B'C'$ (fig. 22), nos quais $BC = B'C'$; $CA = C'A'$ e $AB = A'B'$.

Para demonstrar sobreponha-se $\Delta A'B'C'$ a ΔABC, de tal forma que o lado $A'B'$ coincida com AB. Visto que não sabemos nada sobre a igual-

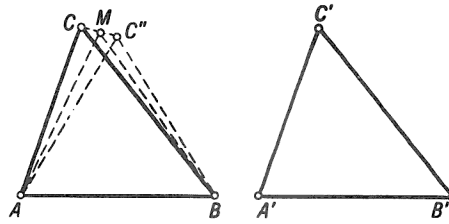


Fig. 22

dade dos ângulos, não podemos afirmar que o ponto C' coincide com o ponto C. Admitamos, pois, que ele vai ocupar a posição C''. Unam-se os pontos C e C''. $\Delta ACC''$ é isósceles (de acordo com a condição $AC'' = AC$) e $\Delta BCC''$ também ($BC'' = BC$ segundo as condições dadas). A altura AM do triângulo isósceles ACC'' vai passar pelo ponto M, o ponto médio do lado CC''(visto que num triângulo isósceles a altura coincide com uma mediana). A altura BM do triângulo isósceles BCC'' também passa pelo ponto médio M do lado CC''. Obtivemos, portanto, duas perpendiculares, à recta CC'' AM e BM no ponto M. Estas perpendiculares não podem coincidir, pois nesse caso A, B e M pertenceriam à mesma recta, o que não é possível porque os pontos C e C'' (e, logo, todo o segmento) se situam do mesmo lado da recta AB.

Chegámos, pois, à conclusão de que, se se admite que os pontos C e C' não coincidem resulta que a partir do mesmo ponto M é possível tra çar duas perpendiculares diferentes à recta CC''. Mas isso entra em contradição com as propriedades anteriormente demonstradas das perpendiculares. Logo, ao sobrepormos os triângulos, o ponto C' tem de coincidir com o ponto C, donde resulta que $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$.

A título de segundo exemplo consideremos a demonstração da afirmação acima referida, segundo a qual se duas bissectrizes dum triângulo são iguais, então esse triângulo é isósceles.

Seja dado ΔABC e as suas bissectrizes AM e BN (fig. 23). Anotemos o teorema.

DADOS: em ΔABC, $\angle CAM = \angle BAM$; $\angle CBN = \angle ABN$ e $AM = BN$.

DEMONSTRAR: $AC = BC$.

Utilizemos o método da redução ao absurdo. Admitamos que o triângulo não é isósceles e consideremos que $AC > BC$. Se assim é, então também $\angle ABC > \angle CAB$. Numerando os ângulos do modo como está indicado na figura, obtemos ainda que $\angle 3 > \angle 1$. Comparemos agora

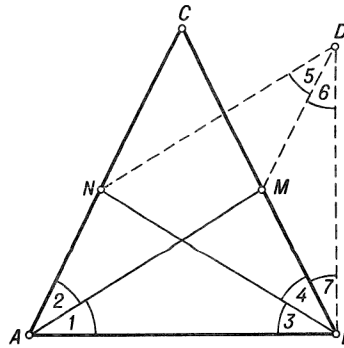


Fig. 23

ΔABM e ΔABN; o lado AB é comum a ambos, AM é igual a BN, de acordo com as condições, enquanto que os ângulos situados entre os lados iguais correspondentes são diferentes. Consequentemente, o lado maior é o oposto ao ângulo maior, ou seja, $AN > BM$. Tracemos agora através do ponto N o segmento ND, igual e paralelo a AM. Então o quadrilátero $AMDN$ vai ser um paralelogramo e, logo, $MD = AN$ e $\angle 5 = \angle 2$. Unindo B com D, obtemos o triângulo BDN, o qual vai ser ISÓSCELES, visto que $ND = AM = BN$. Por outro lado, em ΔBDM o lado $MD = AN$, mas $AN > BM$, logo $MD > BM$, donde $\angle 7 > \angle 6$. Ao mesmo tempo, $\angle 4 > \angle 5$, visto que $\angle 5 = \angle 2 = \angle 1$ e $\angle 4 = \angle 3$, sendo $\angle 3 > \angle 1$. Se somarmos as desigualdades $\angle 7 > \angle 6$ e $\angle 4 > \angle 5$, obteremos: $\angle 4 + \angle 7 > \angle 5 + \angle 6$, ou seja, $\angle BDN > \angle DBN$. Chegámos à conclusão que os ângulos adjacentes à base do TRIÂNGULO ISÓSCELES BDN não são iguais. Esta contradição leva-nos a rejeitar a possibilidade de AC ser maior que BC. Portanto, AC é igual a BC.

Os exemplos apresentados esclarecem suficientemente bem o carácter da demonstração pela redução ao absurdo. Geralmente, recorre-se a este tipo de demonstração quando, ao procurar argumentos, se verifica que a demonstração directa é difícil ou, por vezes, impossível mesmo de encontrar.

Nestes casos, parte-se da afirmação contrária àquela que é necessário demonstrar e, pelo método da análise, tenta-se encontrar uma sucessão de silogismos tal que nos leve a uma afirmação flagrantemente contraditória a qualquer das anteriormente demonstradas. Nos dois últimos exemplos obtivemos precisamente contradições desse tipo: no primeiro caso, chegá-

mos à conclusão de que se podiam traçar duas perpendiculares a uma recta a partir do mesmo ponto desta; no segundo caso, obtivemos que os ângulos adjacentes à base dum triângulo isósceles eram diferentes.

§ 4. QUE AFIRMAÇÕES GEOMÉTRICAS SE PODEM ACEITAR SEM DEMONSTRAÇÃO?

1. Vamos agora responder à última pergunta formulada na introdução: que afirmações geométricas se podem aceitar sem demonstração?

À primeira vista, esta pergunta parece muito simples. Qualquer pessoa dirá que se devem aceitar sem demonstração os axiomas e que se devem tomar como axiomas as afirmações cuja veracidade foi muitas vezes comprovada na prática e não levanta quaisquer dúvidas. No entanto, ao tentarmos na prática escolher as afirmações necessárias verificamos que não é assim tão fácil fazê-lo.

Actualmente é conhecido um grande número de afirmações geométricas, tantas vezes comprovadas na prática que é muito pouco provável alguém vir a duvidar da sua veracidade. Mas isto não implica, evidentemente, que todas essas afirmações devam ser reconhecidas como axiomas.

É indubitável, por exemplo, que através de dois pontos pode passar uma única recta, que a partir dum dado ponto se pode passar uma única perpendicular a uma recta; que a soma de dois lados dum triângulo é maior que o terceito lado; que dois segmentos, iguais a um terceito, são iguais entre si; que a distância entre duas rectas paralelas é igual em qualquer ponto, etc. É claro que seria possível apresentar um número muito maior de afirmações deste tipo. Porque não aceitar todas estas afirmações como axiomas? Não há dúvida de que isso simplificaria substancialmente a geometria, muitas demonstrações tornar-se-iam desnecessárias, etc.

Mas a geometria não se desenvolveu nesse sentido. Pelo contrário, os geómetras esforçaram-se por reduzir o mais possível o número de axiomas e construir toda a geometria pela via dedutiva a partir desse pequeno número de verdades fundamentais.

Porque terão eles escolhido este método de construção dos conhecimentos geométricos, aparentemente mais difícil e complicado?

O desejo de basear a geometria no menor número possível de axiomas explica-se por toda uma série de razões. Antes de mais, ao diminuir o número de axiomas cresce o significado de cada um deles: não nos podemos esquecer de que estes axiomas vão, afinal, conter em si todos os conhecimentos geométricos que deles viermos a deduzir. Por isso, quanto menos

forem os axiomas tanto mais gerais, profundas e importantes serão as propriedades das formas espaciais que cada um deles irá revelar.

Outra razão importante que nos leva a reduzir o mais possível o número de axiomas é o facto de que sendo menor o número de axiomas é muito mais fácil comprovar a sua veracidade e verificar se são satisfeitas as condições a que deve obedecer o conjunto dos axiomas (sobre elas falaremos mais adiante).

2. Temos, pois, perante nós a tarefa de escolher o menor número possível de afirmações fundamentais, as mais gerais e importantes da geometria, que tomaremos por axiomas. A que critério deverá obedecer a nossa escolha? Em primeiro lugar devemos ter em conta que não se pode fazer esta escolha examinando os axiomas um a um, sem entrar em consideração com as relações entre cada um e os restantes. Não devemos aceitar cada axioma isolado, mas sim um SISTEMA COMPLETO DE AXIOMAS, visto que só tal sistema pode reflectir correctamente as propriedades e as relações mútuas realmente existentes entre as principais formas espaciais do mundo material.

Naturalmente, num tal sistema só se podem incluir verdades repetidamente verificadas, que reflictam as leis mais gerais e fundamentais das formas espaciais.

Além disso, ao aceitar um tal sistema de axiomas, devemos verificar se nesse sistema não entram afirmações contraditórias entre si, visto que tais afirmações não podem ser simultaneamente verdadeiras. Não se pode, por exemplo, admitir simultaneamente num sistema os dois seguintes axiomas: "Através dum dado ponto pode-se fazer passar uma única paralela a uma dada recta" e "Através dum dado ponto não se pode fazer passar nem uma paralela a uma recta dada".

Além de que os próprios axiomas não se podem contradizer uns aos outros, entre as suas consequências também não se podem encontrar duas afirmações contraditórias. Esta exigência fundamental a que deve obedecer o sistema de axiomas chama-se *condição de não contradição.*

Mas a par da condição de não contradição devemos também zelar para que no nosso sistema de axiomas não entre nenhuma afirmação que se possa demonstrar com base nos outros axiomas. Esta condição é perfeitamente compreensível se recordarmos que queremos formar um sistema mínimo, ou seja, que contenha o menor número possível de afirmações não demonstráveis. Efectivamente, se uma dada afirmação se pode demonstrar com base nos outros axiomas, então ela já não é um axioma, mas um teorema e não há necessidade de a incluir no sistema de axiomas. A exigência de que cada axioma seja impossível de demonstrar por meio de outros axiomas chama-se *condição de independência.*

No entanto, ao tentar tornar o nosso sistema mínimo, não devemos cair no exagero de afastar dele afirmações em que temos forçosamente de nos basear para expor a geometria.

É nisto que consiste a terceira condição que deve satisfazer um sistema de axiomas — *a condição de plenitude do sistema.* Esta condição pode ser formulada da seguinte maneira, mais exacta: se o sistema *não for completo*, então é sempre possível acrescentar-lhe uma nova afirmação (que contenha, evidentemente, os mesmos conceitos fundamentais que as anteriores), tal que não dependa dos restantes teoremas nem entre em contradição com eles. Se o sistema de axiomas *for completo*, então qualquer nova afirmação que se lhe acrescente e contenha os mesmos conceitos a que se referem os axiomas vai ser uma consequência destes axiomas ou entrar em contradição com eles.

3. Para tornar mais claras as condições de plenitude, independência e não contradição, podemos dar um exemplo que, embora não reflicta exactamente relações geométricas, é bastante análogo às mesmas.

Examinemos um sistema de equações do primeiro grau com três incógnitas. Vamos considerar cada incógnita do sistema como um "conceito" sujeito à definição, e cada equação como um "axioma" dum certo tipo, por meio do qual se estabelecem relações entre estes "conceitos".

Seja dado, pois, o sistema

$$\begin{aligned} 2x - y - 2z &= 3, \\ x + y + 4z &= 6. \end{aligned}$$

Será possível a partir deste sistema determinar o valor das incógnitas x, y e z? Não, visto que o número de equações é menor que o número de incógnitas. O sistema não satisfaz *a condição de plenitude.*

Vamos tentar então corrigi-lo, completando-o com uma equação:

$$\begin{aligned} 2x - y - 2z &= 3, \\ x + y + 4z &= 6, \\ 3x + 3y + 12z &= 18. \end{aligned}$$

Observando com atenção o sistema que obtivemos verifica-se que a introdução da nova equação não alterou a situação, uma vez que a terceira equação é uma simples consequência da segunda e não estabelece quaisquer novas relações. Neste sistema foi violada *a condição de independência.*

Modifiquemos agora a terceira equação e consideremos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} 2x - y - 2z &= 3, \\ x + y + 4z &= 6, \\ 3x + 3y + 12z &= 15. \end{aligned}$$

Continua a ser fácil verificar que este sistema também não serve para definir as incógnitas.

Efectivamente, se dividirmos ambos os membros da última equação por três, obtemos a equação

$$x + y + 4z = 5.$$

Enquanto que a segunda equação diz-nos que

$$x + y + 4z = 6.$$

Em qual destas equações acreditar? É óbvio que estamos perante um sistema *contraditório*, a partir do qual é impossível também determinar o valor das incógnitas.

Se considerarmos, finalmente, o sistema

$$\begin{aligned} 2x - y - 2z &= 3, \\ x + y + 4z &= 6, \\ 2x + y + 5z &= 8, \end{aligned}$$

então é fácil verificar que ele tem uma única solução ($x = 5, y = 13, z = -3$); este sistema é não contraditório, independente e completo. Se lhe acrescentarmos uma quarta afirmação que ligue x, y e z, ela vai ser uma consequência das três equações anteriores ou entrar em contradição com elas.

4. Daqui se pode concluir que a escolha dos axiomas que devem servir de base à geometria não é de modo algum arbitrária, antes obedece a exigências muito sérias. O trabalho com vista à criação do sistema de axiomas necessário à geometria foi começado ainda no fim do século passado e, se bem que os cientistas tenham obtido muitos sucessos nesta direcção, ainda não é possível hoje em dia considerar essa tarefa definitivamente cumprida. Acontece que, ao submeter o sistema a uma revisão sistemática, os cientistas descobrem, de tempos em tempos, que neste sistema há axiomas desnecessários, ou seja, "dependentes", axiomas que são conclusões de outros mais simples e gerais; por isso, as afirmações complexas, que contêm um número bastante grande de condições, são substituídas por axiomas com menor número de condições, etc. Todas estas investigações são de grande interesse para a ciência, visto que o seu objectivo é es-

clarecer quais são as propriedades mais gerais, profundas e importantes das formas espaciais que determinam todo o conteúdo da geometria.

Para ficarmos com uma certa ideia sobre o sistema de axiomas da geometria contemporânea examinemos primeiro o programa de geometria do ensino secundário e vejamos em que axiomas se baseia e quais os que lhe faltam. Limitemo-nos, entretanto, aos axiomas da planimetria.

O curso de geometria do ensino secundário começa com o esclarecimento dos conceitos geométricos fundamentais: o corpo, a superficie, a linha e o ponto. Depois, entre todas as linhas destaca-se a recta e entre todas as superfícies, o plano. Os primeiros axiomas do curso estabelecem as relações entre o ponto, a recta e o plano. Estes axiomas pertencem ao grupo dos *axiomas de combinação* que é o primeiro grupo de todo o sistema de axiomas da geometria.

Os axiomas deste grupo estabelecem como "se combinam" entre si as principais figuras (imagens) geométricas: por quantos pontos é definida uma recta e um plano, em que condições uma recta pertence a um plano, etc.

De todo o grupo dos axiomas de combinação no programa do ensino secundário são referidos apenas dois:

1) *Através de dois pontos pode passar uma e só uma recta.*

2) *Se dois pontos duma recta pertencerem a um plano, então toda a recta pertence a esse plano.*

Entretanto, consciente ou inconscientemente, estamos sempre a servir-nos doutros axiomas, entre os quais, para fundamentar a geometria, são necessários ainda os seguintes:

3) *Qualquer recta tem, pelo menos, dois pontos.* Este axioma, como se vê, encerra uma exigência muito limitada. No entanto, a partir dele, com a ajuda dos axiomas de ordem, é possível demonstrar a existência duma infinidade de pontos na recta.

4) *Em cada plano existem, pelo menos, três pontos não situados na mesma recta.* Este axioma também contém uma exigência mínima, com base na qual se pode depois demonstrar a existência duma infinidade de pontos no plano.

5. Passemos agora ao segundo grupo de axiomas, dos quais nenhum figura no programa do ensino secundário, apesar de nos servirmos deles a cada passo. Os axiomas do segundo grupo designam-se por *axiomas de ordem.* Eles descrevem as leis a que obedece a posição relativa dos pontos na recta e das rectas no plano. É frequente servirmo-nos deles, ainda que duma forma implícita. Quando precisamos, por exemplo, de prolongar um segmento, fazemo-lo sabendo que ele pode ser sempre prolongado, quer para um lado, quer para o outro.

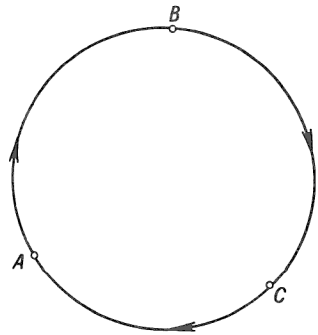


Fig. 24

Quando unimos dois pontos situados de lados diferentes duma recta, temos a certeza de que o segmento assim obtido vai intersectar essa recta. Baseámo-nos nesse facto, por exemplo, para demonstrar a igualdade dos triângulos que têm iguais dois lados e o ângulo oposto a um deles (ver fig. 12). Eis outro exemplo: sabemos que a bissectriz de cada ângulo interno dum triângulo intersecta forçosamente o lado oposto.

Está fora de dúvidas que em todos estes casos deparamos com factos perfeitamente evidentes, mas que afinal reflectem a existência de certas propriedades das figuras geométricas, das quais nos servimos constantemente e que por isso devem ser fixadas como axiomas.

Os axiomas que definem a disposição dos pontos na recta estão ligados aos conceitos de "anterior" e "posterior" e formulam-se do seguinte modo:

1) *Tendo dois pontos situados na mesma recta qualquer deles pode ser considerado anterior, sendo o outro, nesse caso, posterior.*

2) *Se A, B e C forem pontos da mesma recta, A for anterior a B e B anterior a C, então A é anterior a C.*

Estes dois axiomas destacam com bastante nitidez propriedades típicas das rectas, não inerentes a quaisquer linhas. Consideremos, por exemplo, uma circunferência (fig. 24) e, deslocando-nos ao longo dela no sentido dos ponteiros do relógio, marquemos consecutivamente os pontos A, B e

Fig. 25

C; então verificaremos que o ponto A é anterior ao ponto B, o ponto B é anterior ao ponto C, mas o ponto C é anterior ao ponto A. Se os pontos A, B e C estiverem dispostos por esta ordem na recta, diz-se que B se situa *entre* A e C (fig. 25).

3) *Entre dois pontos duma recta encontra-se sempre um terceiro ponto dessa mesma recta.*

Aplicando sucessivamente este axioma a dois pontos da recta (que existem por força do segundo axioma de combinação), obtemos que entre cada dois pontos duma recta existe uma infinidade de pontos dessa mesma recta.

A parte da recta que contém dois dos seus pontos e todos os intermédios destes designa-se por *segmento.*

4) *Para cada ponto da recta existe um ponto anterior e um posterior.*

Deste axioma resulta a possibilidade de prolongar um segmento de recta tanto para um lado como para o outro. Dele mesmo decorre que na recta não há nenhum ponto que seja anterior ou posterior a todos os outros, isto é, *a recta não tem extremos.*

A parte da recta que contém um dado ponto e todos os anteriores ou um dado ponto e todos os posteriores a esse designa-se por *raio* ou *semi-recta.*

A posição resíproca entre os pontos e as rectas num plano é definida pelo seguinte axioma, designado por "axioma de Pasch", segundo o nome do matemático alemão que o formulou pela primeira vez:

5) *Se forem dados três pontos, não situados na mesma recta, então qualquer recta do mesmo plano que não passe por nenhum destes pontos e que intersecte um dos segmentos, definidos pelos mesmos, intersecta ainda mais um e só um desses segmentos* (fig. 26).

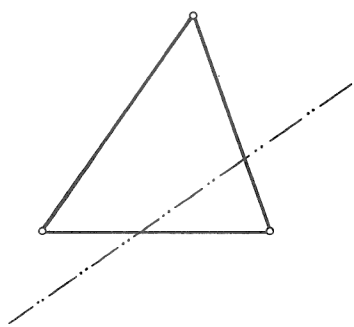


Fig. 26

Por meio deste axioma demonstra-se o teorema sobre a divisão do plano em dois semiplanos por uma recta. Vamos apresentar a demonstração deste teorema, como exemplo duma demonstração rigorosa, baseada apenas nos axiomas e nas afirmações anteriormente demonstradas. Formule-se o teorema do seguinte modo:

Qualquer recta, situada num plano, divide todos os pontos desse plano não pertencentes a ela em duas classes, tais que dois pontos da mesma classe definem um segmento que não intersecta a recta dada, enquanto que dois pontos de classes diferentes definem um segmento que intersecta essa recta.

Durante a demonstração utilizaremos, para abreviar a escrita, alguns símbolos especiais que é necessário fixar.

$\subset$ — *símbolo de pertença*: $A \subset a$ — "o ponto A pertence à recta a". $\times$ — *símbolo de intersecção*: $AB \times a$ — "o segmento AB intersecta a recta a". Escrever um traço sobre qualquer afirmação significa *negá*-la: $\overline{A \subset a}$ — "o ponto A *não* pertence à recta a" . . . — *símbolo de conclusão* — "e, por conseguinte . . ." Estabelecida esta notação, passemos à demonstração do teorema. Antes de mais, assinale-se que *para três pontos situados sobre a mesma recta se verifica a seguinte afirmação, análoga ao axioma de Pasch: qualquer recta que intersecte um dos três segmentos definidos por estes pontos intersecta mais um e só um desses segmentos.* Esta afirmação demonstra-se facilmente com base nos axiomas sobre a disposição dos pontos na recta.

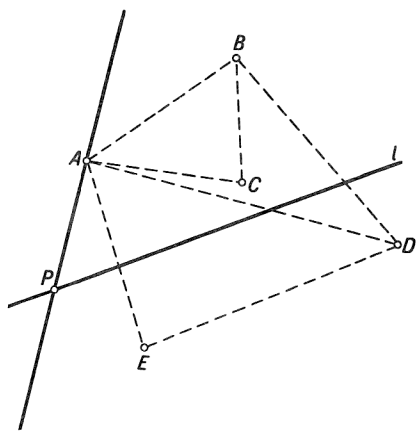


Fig. 27

Efectivamente, se os pontos A, B e C se situarem na mesma recta e o ponto B se situar entre A e C, então todos os pontos dos segmentos AB e BC pertencem ao segmento AC, enquanto que cada ponto do segmento AC (à exclusão de B) pertence ou a AB ou a BC. Por isso, qualquer recta que intersecte AB ou BC intersecta também forçosamente AC, enquanto que toda a recta que intersecte AC intersectà também AB ou BC.

Seja dada num plano a recta l. Precisamos de demonstrar o seguinte:

1) Por meio da recta l é possível dividir em classes os pontos do plano não pertencentes a esta recta.

2) As classes podem ser duas e só duas.

3) Estas classes apresentam as propriedades citadas no teorema.

Para comprovar estes factos consideremos fora da recta l o ponto A (fig. 27) e aceitemos as seguintes condições:

a) o ponto A pertence à *primeira* classe (representá-la-emos por K_1);

b) qualquer ponto não pertencente a l pertence à primeira classe se, juntamente com o ponto A, definir um segmento que não intersecte l;

c) qualquer ponto não pertencente a l pertence à *segunda* classe (que representaremos por K_2) se, juntamente com o ponto A, definir um segmento que intersecte l.

É fácil verificar que existem pontos quer duma classe quer da outra. Para isso asinalemos na recta l o ponto P e tracemos a recta PA. A semi-recta com o extremo em P, que contém o ponto A, contém apenas pontos da primeira classe, visto que o ponto de intersecção P se situa fora dos segmentos definidos pelo ponto A com qualquer um dos restantes pontos da semi-recta. A semi-recta oposta com o mesmo extremo contém apenas pontos da segunda classe, uma vez que o ponto de intersecção P está contido em todos os segmentos definidos pelo ponto A com qualquer um dos pontos desta semi-recta. Unindo o ponto A a qualquer ponto da recta l, obtemos uma infinidade de rectas que contêm pontos da primeira e da segunda classe.

As classes só podem ser *duas* porque, em relação a qualquer segmento que una A a um ponto não pertencente a l, só é verdadeira uma das duas seguintes afirmações: ou o segmento intersecta l ou não intersecta, não exite terceira alternativa.

Mostremos, por fim, que as classes K_1 e K_2 satisfazem as condições do teorema. Consideremos os seguintes casos:

1) Ambos os pontos pertencem à primeira classe: $B \subset K_1$, $C \subset K_1$. Visto que $B \subset K_1$, $\overline{AB} \times l$; uma vez que $C \subset K_1$, $\overline{AC} \times l$. $\therefore$, de acordo com o axioma de Pasch, $\overline{BC} \times l$.

2) Ambos os pontos pertencem à segunda classe: $D \subset K_2$ e $E \subset K_2$. Uma vez que $D \subset K_2$, $AD \times l$ e visto que $E \subset K_2$, $AE \times l$. $\therefore$ com base no axioma de Pasch, $\overline{DE} \times l$.

3) Os pontos pertencem a classes diferentes: $B \subset K_1$, $D \subset K_2$. Uma vez que $B \subset K_1$, $\overline{AB} \times l$; uma vez que $D \subset K_2$, $AD \times l$. $\therefore$, em virtude do axioma de Pasch, BD intersecta l.

O teorema está demonstrado.

A parte do plano que contém todos os pontos da mesma classe chama-se *semiplano*.

Assinale-se que este teorema poderia ser demonstrado sem recorrer a desenho algum. O desenho apenas ajuda a acompanhar os raciocínios e a conservar na memória as relações obtidas. Aliás, esta observação diz respeito a qualquer demonstração suficientemente rigorosa.

6. O seguinte grupo de axiomas, o terceiro, está relacionado com o conceito de *igualdade*. No curso de geometria do ensino secundário a igualdade de figuras geométricas é verificada por meio da sobreposição duma figura a outra.

No manual oficial de geometria diz-se o seguinte a respeito desta questão: "As figuras geométricas podem deslocar-se no espaço sem sofrer quaisquer modificações. Duas figuras geométricas dizem-se iguais se, através da deslocação duma delas pelo espaço, for possível sobrepô-la à segunda, de tal modo que as duas figuras coincidam em relação a todas as suas partes".

À primeira vista, esta definição de igualdade parece perfeitamente compreensível, mas se a examinarmos com atenção não é difícil descobrir que nela existe um ciclo vicioso. De facto, para definir a igualdade de figuras temos de as fazer coincidir uma com a outra, e para isso temos de *deslocar* uma delas pelo espaço, de tal modo que essa figura se mantenha *inalterável* ao longo do processo de deslocação. Mas que significa "manter-se inalterável"? Isso significa que a figura se mantém igual a uma certa forma inicial. Portanto, obtivemos que o conceito de "igualdade" é definido através da deslocação duma "figura inalterável", enquanto que o conceito de "figura inalterável" é definido a partir do conceito de "igualdade".

Por isso, é muito mais razoável fundamentar a igualdade de figuras por meio dum grupo de axiomas, referentes à igualdade de segmentos, ângulos e triângulos.

Os axiomas que estabelecem as propriedades da igualdade entre segmentos são os seguintes:

1) *Numa dada recta, segundo um determinado sentido e a partir dum dado ponto é possível demarcar um e só um segmento igual a um dado.*

2) *Cada segmento é igual a si próprio. Se um dado segmento for igual a outro, então o segundo também é igual ao primeiro. Dois segmentos, iguais a um certo terceiro, são iguais entre si.*

3) Se A, B e C se situam na mesma recta e o mesmo acontece com A',B' e C', e se AB = A'B' e BC = B'C', então AC = A'C'.

Por outras palavras, se a segmentos iguais somarmos outros também iguais, então as somas continuam a ser iguais.

Em relação aos ângulos são válidos axiomas perfeitamente análogos a estes.

4) *Dada uma semi-recta, e escolhido um semiplano é possível construir um e só um ângulo igual a um dado.*

5) Cada ângulo é igual a si próprio. Se um ângulo for igual a outro, então o segundo também é igual ao primeiro. Dois ângulos iguais a um certo terceiro são iguais entre si.

6) *Se a, b e c forem semi-rectas com o mesmo extremo, se outro tanto acontecer com a', b' e c' e se* $\angle ab = \angle a'b'$, $\angle bc = \angle b'c'$, *então* $\angle ac = \angle a'c'$.

Por outras palavras, se a ângulos iguais somarmos outros também iguais, então as somas continuam a ser iguais.

Finalmente, para fundamentar a igualdade de triângulos, introduz-se ainda mais um axioma no terceiro grupo:

7) *Se dois lados dum triângulo, bem como o ângulo formado entre eles, forem iguais, respectivamente, a dois lados de outro triângulo e ao ângulo formado entre estes, então os outros dois ângulos do primeiro triângulo também são iguais aos outros dois ângulos do segundo.* Se tivermos, por exemplo, ΔABC e $\Delta A'B'C'$ e se $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ e $\angle A = \angle A'$, então $\angle B = \angle B'$ e $\angle C = \angle C'$.

Com base nestes sete axiomas demonstram-se, primeiro, os principais critérios de igualdade de triângulos e, depois, todos os teoremas sobre a igualdade de figuras baseados nestes critérios. Deste modo, a sobreposição já não é utilizada em lado nenhum, tornando-se desnecessária.

Vejamos, por exemplo, como se demonstra o primeiro critério de igualdade de triângulos.

Sejam dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$ (fig. 28), nos quais $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ e $\angle A = \angle A'$. É preciso demonstrar que são iguais também todos os restantes elementos destes triângulos. Segundo o axioma 7, obtemos imediatamente que $\angle B = \angle B'$ e $\angle C = \angle C'$. Resta demonstrar que $BC = B'C'$. Admitamos que BC não é igual a $B'C'$. Então, a partir do ponto B', demarquemos no lado $B'C'$ o segmento $B'C'' = BC$. Estudemos ΔABC e $\Delta A'B'C''$. Nestes triângulos $AB = A'B'$, $BC = B'C''$ e $\angle B = \angle B'$. Então, segundo o axioma 7, $\angle B'A'C'' = \angle A$. Mas como dois ângulos iguais a um certo terceiro são iguais entre si, $\angle B'A'C'' = \angle B'A'C'$. Obtivemos que, a partir da semi-recta $A'B'$ e no mesmo semiplano se podem construir dois ângulos

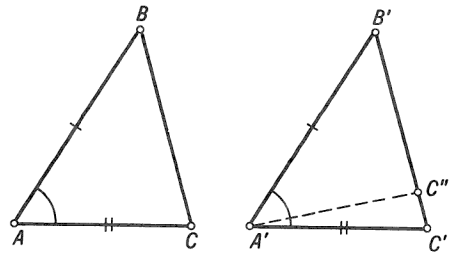


Fig. 28

distintos, iguais a um certo ângulo A, o que contradiz o axioma 4. Assim, rejeitando a afirmação $BC \neq B'C'$, obtemos que $BC = B'C'$.

Do mesmo modo se demonstram os restantes teoremas sobre a igualdade de figuras.

7. Para continuar a exposição da geometria elementar torna-se necessário introduzir outro grupo de axiomas, mais precisamente, os *axiomas de continuidade*. Os exercícios de intersecção da recta com a circunferência ou das circunferências entre si estão estreitamente ligados a este grupo de axiomas. Todas as construções geométricas que se realizam com a ajuda do compasso e da régua baseiam-se exactamente nestes exercícios. Esta circunstância denota a extraordinária importância dos axiomas de continuidade. Além disso, é sobre os axiomas de continuidade que assenta toda a teoria de medição das grandezas geométricas.

No grupo dos axiomas de continuidade encontram-se os dois seguintes axiomas:

1) AXIOMA DE ARQUIMEDES. *Se forem dados dois segmentos, dos quais* o primeiro é maior que o segundo, *então, somando um número suficientemente grande de segmentos iguais ao menor, é sempre possível obter uma soma superior ao segmento maior.*

Em resumo, se $\overline{a}$ e $\overline{b}$ forem dois segmentos, tais que $\overline{a} > \overline{b}$, então existe um número inteiro n, tal que $n\overline{b} > \overline{a}$.

O axioma de Arquimedes encontra-se também no manual oficial, no capítulo sobre a medição de segmentos. O método de procura da medida comum de dois segmentos por meio das divisões sucessivas, a que nos referimos antes, baseia-se no axioma de Arquimedes. De facto, neste método vão-se acumulando dentro do segmento grande segmentos iguais ao pequeno e o axioma de Arquimedes dá-nos a certeza de que essa acumulação de segmentos pequenos, por fim, cobre o segmento maior.

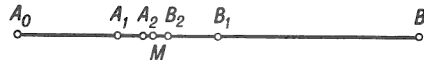


Fig. 29

Do axioma de Arquimedes conclui-se imediatamente que se o segmento $\bar{a}$ for maior que o segmento $\bar{b}$, então existe sempre um número inteiro n, tal que $\frac{\bar{a}}{n} < \bar{b}$.

O segundo axioma de continuidade chama-se AXIOMA DE CANTOR, ou AXIOMA DOS SEGMENTOS ENCAIXADOS. Formula-se do seguinte modo:

2) *Se tivermos um sistema de segmentos em que cada um esteja contido dentro do anterior e se nesse sistema for sempre possível achar um segmento menor que qualquer segmento dado, então existe um único ponto situado no interior de todos estes segmentos.*

Para mostrar como se aplica o axioma de Cantor, examinemos o seguinte exemplo. Considere-se o segmento A_0B_0 (fig. 29), cujo ponto médio será designado por B_1 e ache-se o ponto médio do segmento A_0B_1, que se designará por A_1. A seguir, considere-se o ponto médio de A_1B_1, que se designará por B_2, e ache-se o ponto médio de A_1B_2, a que se chamará A_2. A seguir, tome-se o ponto médio de A_2B_2 que se designará por B_3 e achamos o ponto médio de A_2B_3 a que se chamará A_3. Depois, considere-se o ponto médio de A_3B_3 e assim sucessivamente[1]. Os segmentos A_0B_0, A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, etc, formam um sistema de segmentos encaixados. De facto, cada segmento está contido no anterior e é igual a $\frac{1}{4}$ deste. Deste modo, o comprimento do segmento A_1B_1 é igual a $\frac{1}{4}$ do de A_0B_0, o comprimento de A_2B_2 é igual a $\frac{1}{16}$ do de A_0B_0, $A_3B_3 = \frac{1}{64}$ do de A_0B_0, . . ., e, de uma forma geral, $A_nB_n = \frac{A_0B_0}{4^n}$.

Do axioma de Arquimedes podemos concluir que o comprimento de $\frac{A_0B_0}{4^n}$, para valores suficientemente grandes de n, pode tornar-se menor que o de qualquer segmento dado. Deste modo, todas as condições do

[1] O segmento A_3B_3 não pode ser representado neste desenho, tornando-se necessário imaginá-lo.

axioma são satisfeitas e existe um único ponto situado no interior de todo o sistema de segmentos. Não é difícil achar esse ponto. De facto, se marcarmos o ponto M a $\frac{1}{3}$ do segmento A_0B_0, de tal modo que $A_0M = \frac{1}{3}$ de A_0B_0, então esse ponto será o que procuramos. Realmente, se tomarmos o ponto A_0 como origem do sistema de referência no eixo numérico e se considerarmos o segmento A_0B_0 como a unidade, então aos pontos A_0, A_1, A_2, . . ., A_n corresponderão os valores numéricos

$$\frac{1}{4}; \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} = \frac{5}{16}; \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} = \frac{21}{64}; \ldots;$$

$$\frac{1 + 4 + 4^2 + \ldots + 4^{n-1}}{4^n}.$$

Cada uma destas fracções é menor que $\frac{1}{3}$.

Efectivamente, se ao denominador de cada uma destas fracções subtrairmos uma unidade, então a fracção aumentará e tornar-se-á exactamente igual a $\frac{1}{3}$:

$$\frac{1 + 4 + 4^2 + \ldots + 4^{n-1}}{4^n - 1} = \frac{1 + 4 + 4^2 + \ldots + 4^{n-1}}{(4-1)(1+4+4^2+\ldots+4^{n-1})} = \frac{1}{3}\ ^{1)}.$$

Por outro lado, aos pontos B_0, B_1, B_2, B_3, . . ., B_n correspondem os valores numéricos:

$$\frac{1}{2}; \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}; \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}; \ldots;$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{32} - \ldots - \frac{1}{2^{2n+1}}.$$

---

[1] Neste passo utilizamos a fórmula

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

O valor numérico correspondente ao ponto B_n pode ser expresso também sob a forma:

$$\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{32}\right) - \ldots -$$

$$- \left(\frac{1}{2^{2n}} - \frac{1}{2^{2n+1}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \ldots -$$

$$- \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{2^{2n+1}}$$

Se somarmos estes números obtemos:

$$\frac{2^{2n} - 2^{2n-1} + 2^{2n-2} - \ldots - 2^3 + 2^2 - 2 + 1}{2^{2n+1}}.$$

Daqui facilmente se conclui que cada um dos valores numéricos, correspondentes aos pontos $B_1, B_2, \ldots, B_n$, é *maior* que $\frac{1}{3}$. Somando ao denominador da fracção uma unidade, tornamo-la menor e obtemos:

$$\frac{2^{2n} - 2^{2n-1} + 2^{2n-2} - \ldots - 2^3 + 2^2 - 2 + 1}{2^{2n+1} + 1} =$$

$$= \frac{2^{2n} - 2^{2n-1} + 2^{2n-2} - \ldots - 2^3 + 2^2 - 2 + 1}{(2+1)(2^{2n} - 2^{2n-1} + 2^{2n-2} - \ldots - 2^3 + 2^2 - 2 + 1)} = \frac{1}{3}\ ^{1)}.$$

Deste modo, todos os valores númericos, correspondentes aos pontos B_1, B_2, B_3, $\ldots$, B_n, são maiores que $\frac{1}{3}$. Isto implica que o ponto M, a que corresponde o valor numérico $\frac{1}{3}$, se encontra dentro de cada um dos segmentos A_1B_1, A_2B_2, $\ldots$, A_nB_n, $\ldots$. Logo, é ele o único ponto definido por esta sucessão de segmentos.

Passemos agora à demonstração do teorema fundamental sobre a intersecção entre a recta e a circunferência.

Recorde-se que a circunferência é definida pelo seu centro e raio. Os pontos do plano cuja distância ao centro é menor que o raio chamam-se *pontos internos* em relação à circunferência; os que distam do centro mais do que o raio chamam-se *pontos externos* em relação à circunferência.

---

[1] Neste passo, utilizamos a fórmula

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \ldots - ab^{2n-1} + b^{2n}).$$

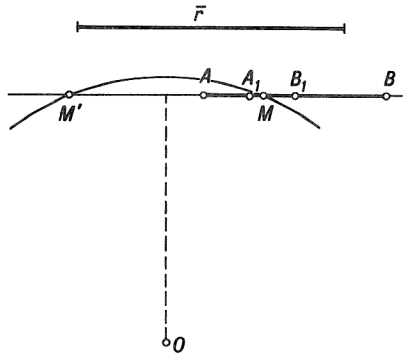


Fig. 30

O teorema fundamental formula-se do seguinte modo:

Qualquer segmento em que um dos extremos seja interno e o outro externo a uma circunferência tem com esta um único ponto comum.

Seja dada uma circunferência com centro em O e raio r, um ponto interno A ($OA < r$) e um ponto externo B ($OB > r$) (fig. 30). Demonstremos, antes de mais, que se em AB existir um ponto M, cuja distância ao ponto O seja igual ao raio, então esse ponto é único. De facto, se esse ponto M existir, então existe também um ponto M', simétrico a M em relação ao segmento perpendicular à recta AB e traçado a partir de O, sendo $M'O = MO = r$.

Segundo uma propriedade dos segmentos que unem um certo ponto à recta AB, todos os pontos internos do segmento $M'M$ são também pontos internos da circunferência e todos os pontos externos de $M'M$ são também pontos externos da circunferência. Por isso, o ponto A tem de se situar entre os pontos M' e M, enquanto no segmento AB só pode existir um ponto M.

Depois de reconhecer este facto, divida-se o segmento AB ao meio e compare-se com o raio a distância entre o ponto obtido e o centro. Se essa distância for igual ao raio, o teorema está demonstrado. Se ela for menor que o raio, então o ponto obtido é interno e será designado por A_1. Se a distância em causa for maior que o raio, então o ponto obtido é externo e será designado por B_1.

Seguidamente, acha-se o ponto médio do segmento A_1B (ou AB_1), em relação ao qual de novo são possível três casos: ou a sua distância em relação ao centro é igual ao raio e então o teorema estará demonstrado, ou é

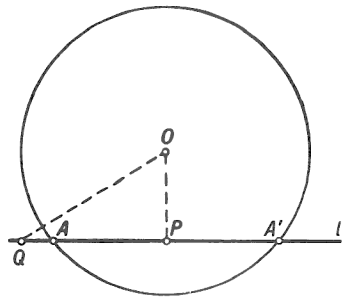


Fig. 31

menor que o raio e então representaremos esse ponto pela letra A com o respectivo número, ou é maior que o raio e então representá-lo-emos pela letra B com o respectivo número. Continuando indefinidamente este processo, obteremos, ou que a distância entre um dos pontos e o centro é igual ao raio, e então o teorema estará demonstrado, ou que todos os pontos representados pelas letras $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ são internos e que os representados pelas letras $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ são externos. Mas neste último caso obtemos um sistema de segmentos que satisfaz as condições do axioma de Cantor, uma vez que cada segmento está contido dentro do anterior e que o comprimento de cada segmento é duas vezes menor que o comprimento do segmento anterior. Isso significa que existe um único ponto situado dentro de todos estes segmentos. Uma vez que este se encontra entre todos os pontos internos e todos os externos do segmento, não pode ser nem externo nem interno; por conseguinte, é um ponto da circunferência.

Deste teorema resulta, em particular, que se a distância entre a recta e o centro da circunferência for menor que o raio, então esta recta tem com a circunferência dois e apenas dois pontos comuns. De facto, seja O o centro e r o raio da circunferência (fig. 31). A distância OP entre o centro da circunferência e a recta l é menor que o raio; logo, P é um ponto interior. Demarquemos na recta l, a partir do ponto P, o segmento $PQ = r$.

Visto que no triângulo OPQ a hipotenusa OQ é maior que o cateto $PQ = r$, $OQ > r$ e, portanto, Q é um ponto externo. De acordo com o teorema demonstrado o segmento PQ tem em comum com a circunferência um único ponto A. O segundo ponto comum A' é simétrico a A em relação à perpendicular OP. Uma vez que todos os pontos internos do segmento AA' são também pontos internos da circunferência e todos os

externos são também externos em relação a esta, a recta *l* e a circunferência não têm quaisquer outros pontos comuns.

É possível demonstrar afirmações análogas aos axiomas de Arquimedes e Cantor em relação aos arcos de circunferência, ou seja, é possível demonstrar que:

1) *Somando um dado arco um número suficientemente grande de vezes, é possível obter um arco maior do que qualquer outro previamente dado.*

2) Se tivermos um sistema de arcos, tal que cada arco esteja contido no anterior, e se nesse sistema for sempre possível encontrar um arco, menor que qualquer dado, então existe um ponto situado dentro de todos estes arcos.

Com base nestes teoremas é fácil demonstrar o teorema fundamental sobre a intersecção de circunferências.

Se A for um ponto interno e B um ponto externo em relação a uma dada circunferência, então qualquer outro arco de circunferência que una os pontos A e B tem em comum com essa circunferência um e um só ponto.

A demonstração deste teorema é perfeitamente análoga à demonstração do teorema sobre a intersecção entre a circunferência e o segmento.

8. O último grupo de axiomas da geometria, o quinto, está ligado com o conceito de *paralelismo* e contém, ao todo, um axioma:

Através dum ponto, não pertencente a uma dada recta, é possível fazer passar uma e só uma recta paralela a essa.

As afirmações baseadas nesse axioma são do conhecimento geral e não nos deteremos a falar sobre elas.

O sistema que estudámos dá-nos uma ideia bastante clara do conjunto das afirmações não demonstráveis sobre o qual assenta a geometria. Convém, entretanto, salientar que, ao tentar simplificar o mais possível a exposição, não nos esforçámos por tornar este conjunto mínimo em quantidade.

O número destes axiomas poderia ser ainda mais reduzido. Os dois axiomas de Arquimedes e Cantor poderiam ser substituídos por um apenas — o chamado axioma de Dedekind. Seria possível atenuar um pouco as exigências contidas nos axiomas. No axioma de Pasch, por exemplo, seria possível não exigir que a recta que intersecta um dos lados do triângulo intersecte mais um e *apenas* um lado. Basta conservar a exigência de que a recta que intersecta um dos lados do triângulo intersecte mais outro lado, enquanto que o facto desse lado ser *só* um pode ser demonstrado. Do mesmo modo, no axioma de Cantor é possível não exigir que o ponto, definido pelo sistema de segmentos encaixados, seja único. A unicidade desse ponto também pode ser demonstrada. No entanto, tudo isso complicaria e alongaria a explicação.

Façamos o resumo de tudo o que foi dito neste livro,

1) Definimos a geometria como a ciência sobre as formas espaciais do mundo material.

2) O conhecimento inicial das propriedades espaciais foi obtido por meio da indução, ou seja, por meio de observações e experiências muito repetidas.

3) As propriedades espaciais mais gerais e profundas são formuladas sob a forma de um sistema de afirmações fundamentais: os axiomas.

4) O sistema de axiomas só reflecte correctamente as propriedades espaciais existentes se satisfizer as condições de plenitude, independência e não contradição.

5) Tirando os axiomas, todas as outras afirmações geométricas— teoremas se obtêm por meio da dedução, ou seja, são deduzidas a partir dos axiomas e dos teoremas anteriormente demonstrados. Este sistema de deduções chama-se demonstração.

6) Para que a demonstração seja correcta, isto é, para que se torne indubitável a veracidade do teorema a demonstrar, ela deve ser construída com base em silogismos correctos e estar livre de erros. A justeza da demonstração depende dos seguintes factores: 1) a formulação exacta e certa da afirmação a demonstrar, 2) a escolha de argumentos necessários e verdadeiros e 3) a observância rigorosa das regras lógicas no decurso da demonstração.

CAROS LEITORES,

A Editora "Mir" publica livros de autores soviéticos em traduções para o Português, Espanhol, Inglês, Francês e outros idiomas. Entre as nossas publicações encontram-se as melhores obras dos diversos ramos da Ciência e da Engenharia desde manuais e compêndios para o ensino superior e técnico, até obras dedicadas às Ciências Naturais e Médicas, passando por monografias, livros de divulgação e de ficção científica

No intuito de melhorar o nosso trabalho e de melhor corresponder aos interesses dos nossos leitores, convidamo-vos a enviar as vossas opiniões e sugestões para:
Editora "MIR",
1 Rijski per., 2, 129820, Moscovo, 1-110, GSP, URSS

Uspensky V.

A MÁQUINA DE POST

Neste fascículo da série "Iniciação na Matemática" se examina minuciosamente uma possível realização matemática da noção intuitiva e imprecisa de algoritmo, precisamente, a versão devida a Emil Post e publicada em 1936 quase simultaneamente com uma variante semelhante e concebida independentemente por A. Turing. Discute-se detalhadamente o chamado "princípio de Post" estipulando que o conceito matemático descreve de modo adequado a realidade. Em anexo se dá a tradução do artigo original de E. Post "Finite combinatory processes — formulation 1".

INICIAÇÃO À MATEMÁTICA

Este é o nono fascículo de "Iniciação na Matemática", série que compreende:

A. Guelfond "Resolução de equações em números inteiros";

A. Belski, L. Kalujnin "Devisão inexata";

V. Boltianski "O conceito de derivação";

I. Sobol "O método de Monte Carlo";

I. Yaglom "Álgebras booleanas";

V. Uspenski "O triângulo de Pascal";

S. Fomin "Sistemas de numeração"

A. Barsov, A. Okhlopkova "Programação linear".

EDITORA MIR MOSCOU